

Entraîner un réseau de neurones artificiels (partie 1)

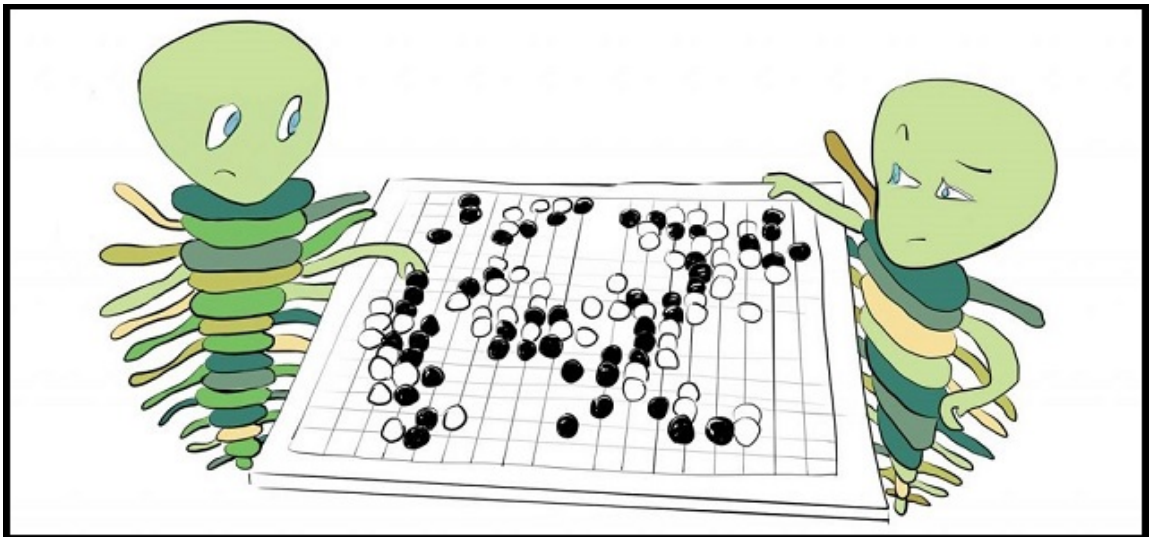
CSI 4106 - Automne 2025

Marcel Turcotte

Version: oct. 21, 2025 14h36

Préambule

Message du Jour



[From Turing's Chess to Neural Game Engines: AI in Video Games Today](#) par Alex Landa, ODSC, 2025-09-02, un [Podcast](#) (1h 8m) avec Julian Togelius, Professeur Associé à l'Université de New York.

Le texte décrit un podcast mettant en vedette Julian Togelius, Professeur Associé à l'Université de New York et co-directeur du Game Innovation Lab. Togelius est l'auteur de "Artificial Intelligence and Games", dont la deuxième édition est sortie en 2025. Pour ceux qui ont accès à un appareil sur le réseau de l'Université d'Ottawa, une copie de ce livre est disponible en téléchargement.

- [Artificial Intelligence and Games](#)
 - [PDF](#), [EPUB](#)

Je suis Julian Togelius sur les réseaux sociaux depuis un certain temps, bien que je n'aie pas encore eu l'occasion de lire son livre.

Résultats d'apprentissage

- **Expliquer** l'architecture et le fonctionnement des réseaux de neurones à propagation avant (FNN).
- **Identifier** les fonctions d'activation courantes et comprendre leur impact sur la performance du réseau.
- **Introduire** une implémentation simple mais fonctionnelle d'un réseau de neurones à propagation avant.

Résumé

3Blue1Brown (1/2)

<https://youtu.be/aircAruvnKk>

À mon avis, c'est une vidéo **excellente** et **informative**. (18m 40s)

Il est fortement recommandé de regarder cette vidéo. Bien qu'elle couvre des concepts que nous avons déjà explorés, elle présente le matériel d'une manière difficile à reproduire en classe.

- Fournit une explication claire de l'**intuition** derrière l'efficacité des réseaux de neurones, détaillant la **hiérarchie des concepts** brièvement mentionnée lors de la dernière conférence. (5m 31s à 8m 38s)
- Offre une justification convaincante de la nécessité d'un **terme de biais**.
- De même, élucide le concept des **fonctions d'activation** et l'importance d'une fonction d'écrasement.
- Le segment débutant à 13m 26s offre une explication visuelle de l'**algèbre linéaire** impliquée : $\sigma(WX^T + b)$.

3Blue1Brown (2/2)

<https://www.youtube.com/watch?v=IHZwWFHWa-w>

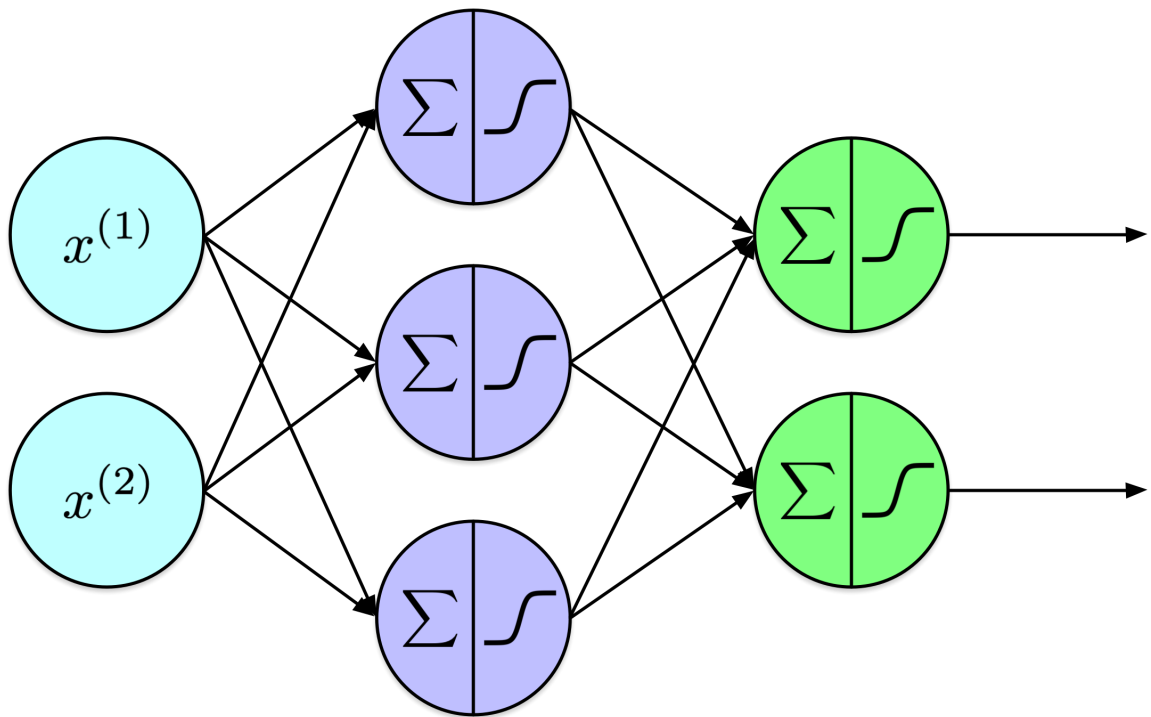
Notre discussion portera sur la rétropropagation. Regarder [Descente de gradient, comment les réseaux de neurones apprennent](#) pourrait être utile.

Nous reviendrons sur le concept de descente de gradient dans notre discussion sur l'algorithme de rétropropagation. Pour réviser ce sujet, vous pouvez regarder cette vidéo : [Descente de gradient, comment les réseaux de neurones apprennent | Chapitre 2 de l'apprentissage profond](#) (durée : 20 minutes et 33 secondes).

Résumé - DL

- **Apprentissage profond (DL)** est une technique d'**apprentissage automatique** qui peut être appliquée à l'**apprentissage supervisé** (y compris la **régression** et la **classification**), l'**apprentissage non supervisé**, et l'**apprentissage par renforcement**.
- Inspiré par la structure et la fonction des **réseaux neuronaux biologiques** trouvés chez les animaux.
- Composé de **neurones interconnectés** (ou unités) organisés en **couches**.

Résumé - FNN



L'information dans cette architecture circule de manière unidirectionnelle—de gauche à droite, allant de l'entrée à la sortie. Par conséquent, on l'appelle un **réseau de neurones à propagation avant (FNN)**.

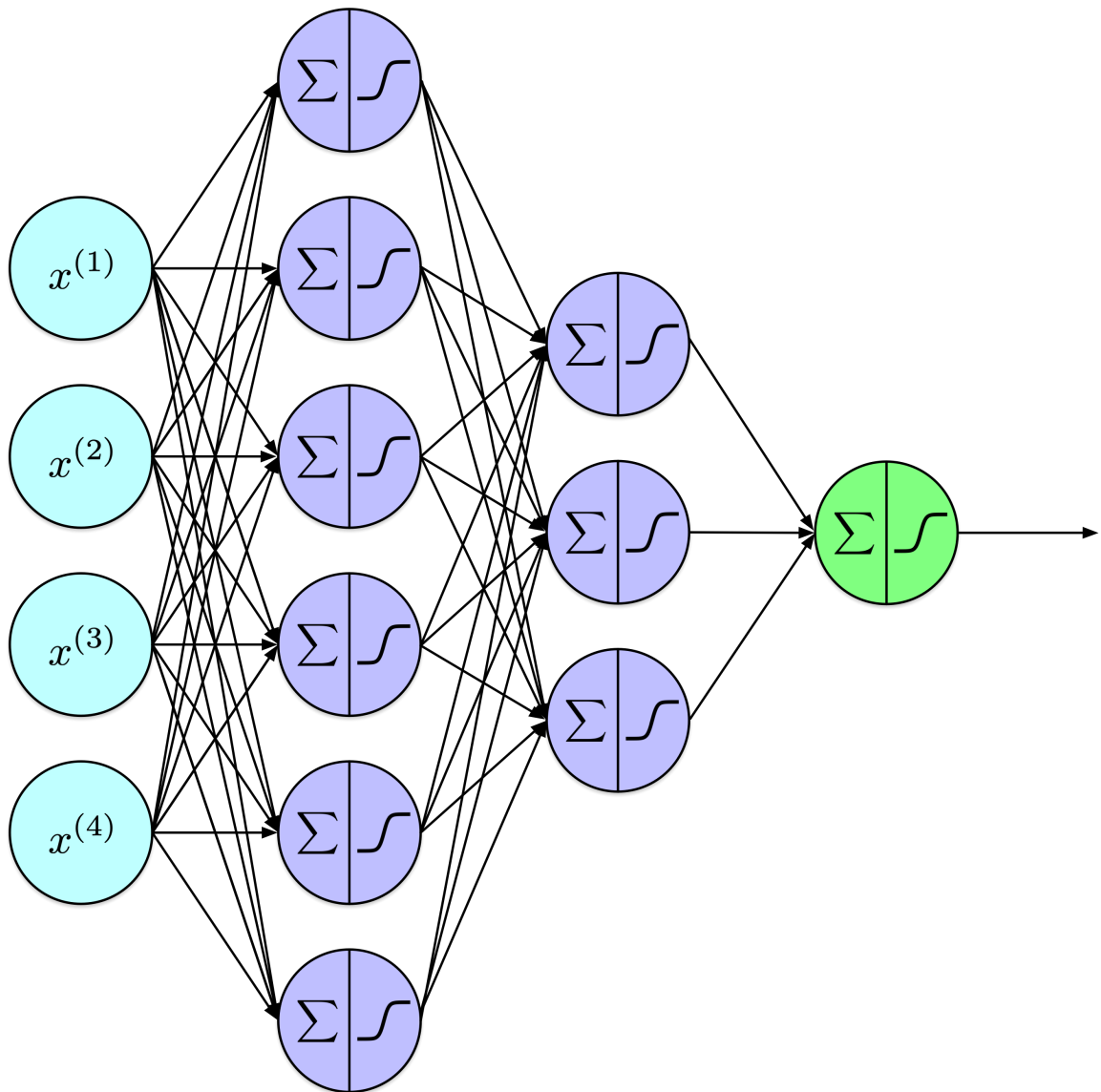
Les réseaux de neurones ont des **entrées** et des **sorties**.

Le réseau se compose de **trois couches** : entrée, cachée et sortie. La **couche d'entrée** contient deux nœuds, la **couche cachée** comprend trois nœuds, et la **couche de sortie** a deux nœuds. Des couches cachées supplémentaires et des nœuds par couche peuvent être ajoutés, ce qui sera discuté plus tard.

Il est souvent utile d'inclure des nœuds d'entrée explicites qui ne réalisent pas de calculs, appelés **unités d'entrée** ou **neurones d'entrée**. Ces nœuds agissent comme des espaces réservés pour introduire des caractéristiques d'entrée dans le réseau, passant les données directement à la couche suivante sans transformation. Dans le

diagramme du réseau, ce sont les nœuds bleu clair à gauche. Typiquement, **le nombre d'unités d'entrée correspond au nombre de caractéristiques**.

Résumé - FNN



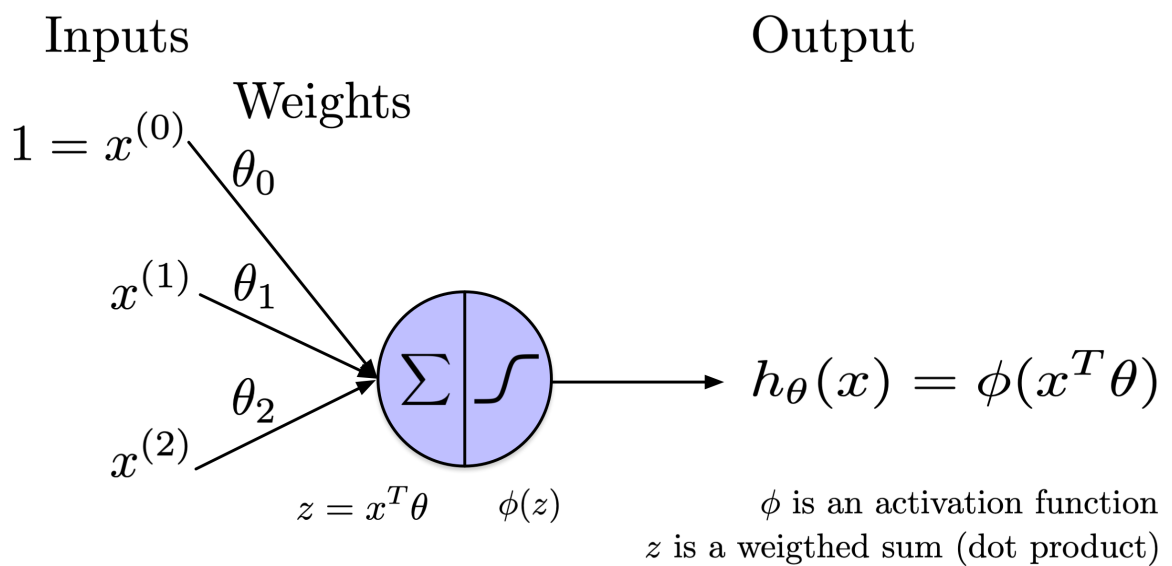
Le nombre de **couches** et de **nœuds** peut varier en fonction des exigences spécifiques.

Les réseaux de neurones peuvent avoir un nombre de nœuds d'entrée très important, souvent de l'ordre de plusieurs centaines ou milliers, selon la complexité des données. De plus, ils peuvent contenir de nombreuses couches cachées. Par exemple, ResNet, qui a remporté la tâche de classification d'images ILSVRC 2015, comporte 152 couches. Les auteurs de ResNet ont démontré des résultats pour des réseaux de 100 et même 1000 couches (He et al. 2016). Cependant, le nombre de nœuds de sortie tend à être relativement petit. Dans les problèmes de régression, il y a généralement un seul nœud de sortie, tandis que dans les tâches de classification (qu'elles soient multiclassées ou multilabel), le nombre de nœuds de sortie correspond au nombre de classes.

Considérons un scénario dans lequel on peut déterminer le nombre optimal de couches et de nœuds pour un réseau de neurones. Les preuves empiriques suggèrent que ces réseaux excellent dans l'exécution des tâches de classification et de régression. Malgré la complexité résultant d'un grand nombre de paramètres, qui complique l'interprétation des motifs appris, comprendre le passage avant, c'est-à-dire comment le réseau génère des prédictions à partir de nouvelles données d'entrée, est relativement simple.

L'objectif d'aujourd'hui est de comprendre le processus d'ajustement des poids du réseau en fonction de sa sortie actuelle. Plus précisément, nous visons à comprendre comment utiliser le signal de sortie pour propager l'information en retour à travers le réseau.

Résumé - unités



Introduire un input fictif $x^{(0)} = 1$ est une *astuce* qui simplifie l'expression $x^T \theta + b$.

Dans le schéma ci-dessus, il est important de préciser que les entrées et la sortie concernent spécifiquement cette unité individuelle, et non les entrées et la sortie globales de tout le réseau.

Le nom **activation** provient du rôle de la fonction qui détermine si un neurone doit être "activé" ou "déclenché" en fonction de son entrée.

Historiquement, le concept s'inspire des neurones biologiques, où un neurone s'active et transmet un signal à d'autres neurones si son entrée dépasse un certain seuil. Dans les réseaux de neurones artificiels, la fonction d'activation remplit un rôle similaire en introduisant de la non-linéarité dans le modèle. Cette non-linéarité est cruciale car elle permet au réseau d'apprendre des schémas et des représentations complexes dans les données.

Fonctions d'activation courantes

In [1]: # Attribution: https://github.com/ageron/handson-ml3/blob/main/10_neural_net

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

from scipy.special import expit as sigmoid

def relu(z):
    return np.maximum(0, z)

def derivative(f, z, eps=0.000001):
    return (f(z + eps) - f(z - eps)) / (2 * eps)

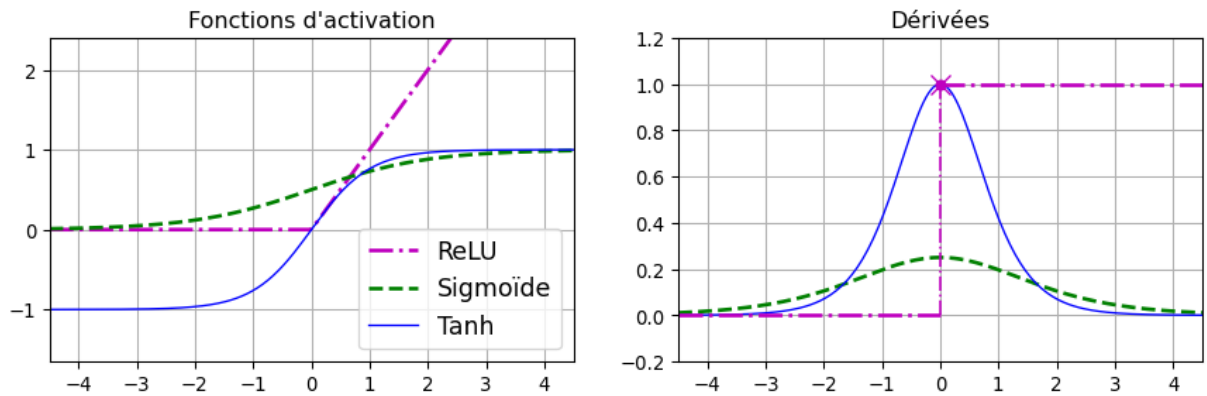
max_z = 4.5
z = np.linspace(-max_z, max_z, 200)

plt.figure(figsize=(11, 3.1))

plt.subplot(121)
plt.plot(z, relu(z), "m-.", linewidth=2, label="ReLU")
plt.plot(z, sigmoid(z), "g--", linewidth=2, label="Sigmoïde")
plt.plot(z, np.tanh(z), "b-", linewidth=1, label="Tanh")
plt.grid(True)
plt.title("Fonctions d'activation")
plt.axis([-max_z, max_z, -1.65, 2.4])
plt.gca().set_yticks([-1, 0, 1, 2])
plt.legend(loc="lower right", fontsize=13)

plt.subplot(122)
plt.plot(z, derivative(sigmoid, z), "g--", linewidth=2, label="Sigmoïde")
plt.plot(z, derivative(np.tanh, z), "b-", linewidth=1, label="Tanh")
plt.plot([-max_z, 0], [0, 0], "m-.", linewidth=2)
plt.plot([0, max_z], [1, 1], "m-.", linewidth=2)
plt.plot([0, 0], [0, 1], "m-.", linewidth=1.2)
plt.plot(0, 1, "mo", markersize=5)
plt.plot(0, 1, "mx", markersize=10)
plt.grid(True)
plt.title("Dérivées")
plt.axis([-max_z, max_z, -0.2, 1.2])

plt.show()
```



Géron (2022) – [10_neural_nets_with_keras.ipynb](#)

Considérez les observations suivantes :

- La fonction sigmoïde produit des sorties dans l'intervalle ouvert $(0, 1)$.
- La fonction tangente hyperbolique ($\tanh$) a une image couvrant l'intervalle ouvert $(-1, 1)$.
- La fonction unitaire linéaire rectifiée (ReLU) produit des valeurs dans l'intervalle $[0, \infty)$.

De plus, notez :

- La valeur maximale de la dérivée de la fonction sigmoïde est 0.25.
- La valeur maximale de la dérivée de la fonction $\tanh$ est 1.
- La dérivée de la fonction ReLU est 0 pour les entrées négatives et 1 pour les entrées positives.

En outre :

- Un nœud utilisant ReLU comme fonction d'activation génère des sorties dans la plage $[0, \infty)$. Cependant, sa dérivée, utilisée dans la descente de gradient lors de la rétropropagation, est constante, prenant les valeurs de 0 ou 1.

Approximation Universelle

Le **théorème d'approximation universelle** affirme qu'un réseau de neurones feed-forward avec une seule couche cachée contenant un nombre fini de neurones peut **approximer n'importe quelle fonction continue** sur un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$, moyennant des poids et des fonctions d'activation appropriés.

Cybenko (1989); Hornik, Stinchcombe, et White (1989)

Le Théorème d'Approximation Universelle (UAT) est une garantie théorique puissante : en principe, un réseau à une seule couche cachée suffisamment large peut approximer n'importe quelle fonction continue. Mais ce n'est pas une prescription pratique. Dans les

problèmes réels, une architecture profonde atteint souvent la même précision d'approximation avec beaucoup moins de paramètres et de manière plus formable et généralisable.

- Sous des hypothèses relativement légères (par exemple, activation non polynomiale, continuité, domaine d'entrée compact), un réseau de neurones feed-forward avec une couche cachée et un nombre suffisamment grand de neurones (c'est-à-dire "assez large") peut approximer n'importe quelle fonction continue aussi précisément que souhaité (avec une erreur arbitrairement petite) sur un domaine compact.
- Le théorème est typiquement un résultat d'*existence*. Il garantit qu'un tel réseau existe, mais ne montre pas comment trouver les bons poids (c'est-à-dire la procédure d'entraînement) ni combien de neurones sont précisément nécessaires.
- Le théorème ne garantit pas non plus quoi que ce soit concernant la généralisation aux données non vues (c'est-à-dire le surapprentissage) ou l'efficacité computationnelle de l'entraînement.
- L'UAT dit "il existe un réseau assez large", mais cela peut nécessiter un nombre extrêmement grand de neurones. Dans de nombreux contextes pratiques, cela devient infaisable (trop de paramètres, trop lent, risque de surapprentissage, etc.).
- Certaines fonctions sont "difficiles" à approximer par des réseaux peu profonds (c'est-à-dire à une seule couche cachée) à moins d'utiliser un nombre exponentiellement élevé de neurones. En revanche, les réseaux plus profonds peuvent approximativement la même fonction avec beaucoup moins de paramètres.
- L'UAT suppose que vous pouvez choisir les "bons" poids. Mais dans l'entraînement réel, l'optimisation (par exemple via la descente de gradient) peut être bloquée dans de mauvais minima locaux, plateaux, points de selle, ou échouer à converger vers la solution d'approximation.
- Il ne donne aucune garantie sur le nombre d'échantillons d'entraînement nécessaires pour réaliser une bonne approximation, ni sur la généralisation à de nouvelles données.
- Même si un réseau peut approximer exactement une fonction cible (sur les données d'entraînement), il peut mal généraliser si le modèle est sur-paramétré ou si la régularisation est insuffisante.
- L'UAT est silencieux sur la robustesse au bruit, la stabilité, ou l'extrapolation en dehors du domaine d'entraînement.

MLP Naïf

Données

```
In [2]: # Générer et tracer le jeu de données "cercles"
import matplotlib.pyplot as plt
```

```

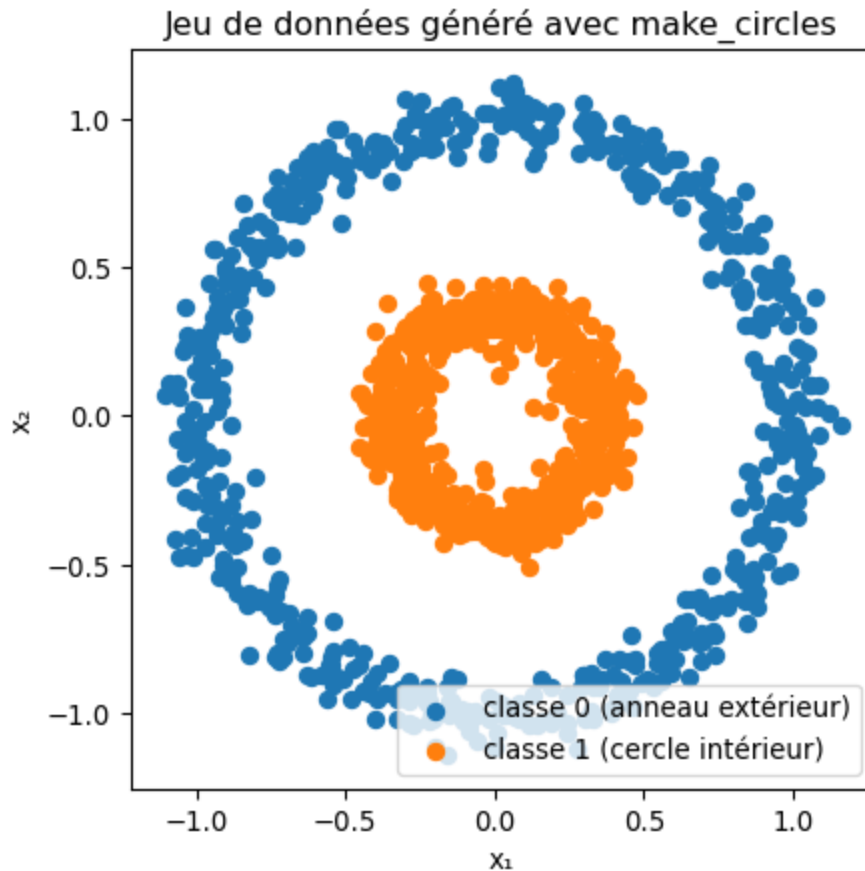
from sklearn.datasets import make_circles

# Générer des données synthétiques
X, y = make_circles(n_samples=1200, factor=0.35, noise=0.06, random_state=42)

# Séparer les coordonnées pour le tracé
x1, x2 = X[:, 0], X[:, 1]

# Tracer les deux classes
plt.figure(figsize=(5, 5))
plt.scatter(x1[y==0], x2[y==0], color="C0", label="classe 0 (anneau extérieur)")
plt.scatter(x1[y==1], x2[y==1], color="C1", label="classe 1 (cercle intérieur)")
plt.xlabel("x1")
plt.ylabel("x2")
plt.title("Jeu de données généré avec make_circles")
plt.axis("equal") # assure que les cercles ont l'air ronds
plt.legend()
plt.show()

```

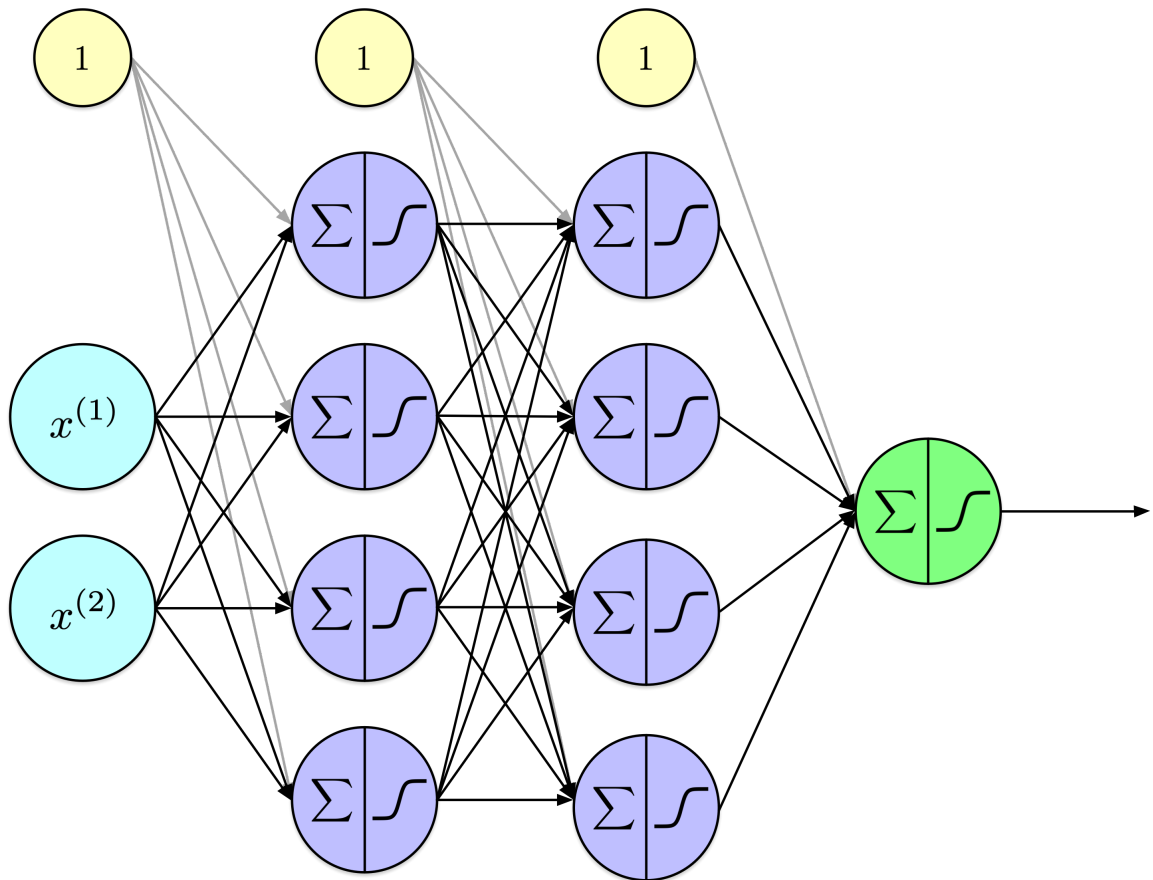


Des concepts tels que les dérivées partielles, la descente de gradient et la rétropropagation peuvent sembler intimidants au départ. Pour atténuer cette complexité, nous proposons une approche intermédiaire en construisant un réseau de neurones simple mais pleinement opérationnel.

Il est important de noter que l'algorithme d'apprentissage proposé n'est pas destiné à remplacer la méthode standard de rétropropagation utilisée en pratique.

Nous construisons un jeu de données qui comprend deux classes distinctes : un anneau extérieur (classe 1) et un cercle intérieur (classe 0). Ces classes sont délibérément conçues pour être non linéairement séparables dans l'espace des caractéristiques (x_1, x_2) , présentant un scénario simple mais difficile pour les tâches de classification.

Architecture



Notre réseau de neurones, un perceptron multicouche, est conçu avec deux nœuds d'entrée correspondant aux deux caractéristiques présentes dans notre ensemble de données. À travers nos expérimentations utilisant TensorFlow Playground et Keras, comme détaillé dans [CircularSeparability](#), nous avons déterminé qu'une configuration de deux couches cachées contenant chacune quatre neurones est efficace pour la classification des échantillons.

Le réseau produit une seule sortie via la fonction d'activation sigmoïde.

Dans la visualisation, les arêtes noires entre les unités représentent les poids du modèle. De plus, nous avons inclus trois nœuds qui produisent une valeur constante de 1 uniquement à des fins de visualisation ; ces nœuds n'ont pas d'équivalent dans le modèle réel. Les arêtes grises connectant ces nœuds à d'autres unités représentent les termes de biais.

Utilitaires

```
In [3]: def sigmoid(z):  
        return 1.0 / (1.0 + np.exp(-z))  
  
def bce_loss(y_true, y_prob, eps=1e-9):  
  
    """Perte d'entropie croisée binaire (moyenne sur les données)."""  
  
    y_prob = np.clip(y_prob, eps, 1 - eps)  
  
    return -np.mean(y_true * np.log(y_prob) + (1 - y_true) * np.log(1 - y_prob))
```

Nous définissons deux fonctions utilitaires, `sigmoid` et `bce_loss`. La perte d'entropie croisée binaire a la même définition que celle de notre [modèle de régression logistique](#). Vous souvenez-vous d'un autre nom pour la perte d'entropie croisée binaire ?

Dans `bce_loss`, les probabilités sont contraintes dans l'intervalle $[\epsilon, 1 - \epsilon]$. Ce clipping permet d'éviter les expressions logarithmiques $\log(0)$ et $\log(1 - 1) = \log(0)$, empêchant ainsi des valeurs indéfinies ou infinies lors du calcul.

Les deux fonctions sont conçues pour prendre en entrée des tableaux NumPy (`ndarray`). Notamment, la fonction `bce_loss` calcule la perte pour l'ensemble du jeu de données sans nécessiter une itération explicite sur les points de données individuels.

NaïveMLP

L'implémentation complète est présentée ci-dessous et sera examinée dans les écrans suivants.

```
In [4]: class NaiveMLP:  
  
    """  
    Un perceptron multicouche minimal (MLP) utilisant un algorithme d'entraînement  
    par force brute qui ne nécessite pas de calculs de dérivées.  
  
    Veuillez noter que l'algorithme d'entraînement suggéré est destiné uniquement  
    à des fins didactiques et ne doit pas être confondu avec un véritable algorithme.  
    """  
  
    def __init__(self, layer_sizes, step=0.1, seed=None):  
  
        self.sizes = list(layer_sizes)  
        self.step = float(step)  
        rng = np.random.default_rng(seed)  
  
        # Initialiser les poids et les biais  
  
        self.W = [rng.standard_normal(size=(in_d, out_d)) * 0.5  
                  for in_d, out_d in zip(layer_sizes[:-1], layer_sizes[1:])]
```

```

        self.b = [np.zeros(out_d) for out_d in layer_sizes[1:]]

def forward(self, X):
    """
    Passage avant simple : ne calcule que les activations de sortie.

    X: forme (N, input_dim)

    Retourne : probabilités de sortie, forme (N,)
    """

    a = X
    for W, b in zip(self.W, self.b):
        a = sigmoid(a @ W + b)

    return a.ravel()

def predict(self, X, threshold=0.5):
    return (self.forward(X) >= threshold).astype(int)

def loss(self, X, y):
    return bce_loss(y, self.forward(X))

def _all_param_tags(self):
    """
    Génère des étiquettes référant à chaque paramètre scalaire :
    ('W', layer_idx, i, j) ou ('b', layer_idx, j)
    """

    for l, W in enumerate(self.W):
        for i in range(W.shape[0]):
            for j in range(W.shape[1]):
                yield ('W', l, i, j)
        for j in range(self.b[l].shape[0]):
            yield ('b', l, j)

def _get_param(self, tag):
    kind = tag[0]
    if kind == 'W':
        _, l, i, j = tag
        return self.W[l][i, j]
    else:
        _, l, j = tag
        return self.b[l][j]

def _set_param(self, tag, val):
    kind = tag[0]
    if kind == 'W':
        _, l, i, j = tag
        self.W[l][i, j] = val
    else:

```

```

        _, l, j = tag
        self.b[l][j] = val

def train(self, X, y, epochs=10, verbose=True):
    """
    Mise à jour simultanée :
    - Pour chaque paramètre scalaire  $\theta$ , essayez  $\theta + \delta$  pour  $\delta$  dans  $\{-step, step\}$ 
      choisissez le  $\delta$  qui donne la perte minimale.
    - Collecter tous les  $\delta$  choisis, puis appliquer toutes les mises à jour
    """

    for ep in range(1, epochs + 1):

        base_loss = self.loss(X, y)
        updates = {}

        # Tester tous les paramètres
        for tag in self._all_param_tags():

            theta = self._get_param(tag)
            best_delta = 0.0
            best_loss = base_loss

            for delta in (-self.step, 0.0, +self.step):
                self._set_param(tag, theta + delta)
                trial_loss = self.loss(X, y)
                if trial_loss < best_loss:
                    best_loss = trial_loss
                    best_delta = delta

            # restaurer l'original
            self._set_param(tag, theta)
            updates[tag] = best_delta

        # Appliquer tous les deltas ensemble
        for tag, d in updates.items():
            if d != 0.0:
                self._set_param(tag, self._get_param(tag) + d)

        new_loss = self.loss(X, y)

        if verbose:
            print(f"Époque {ep:3d} : perte {base_loss:.5f} → {new_loss:.5f}")

        # arrêt précoce optionnel
        if abs(new_loss - base_loss) < 1e-12:
            break

```

Pour assurer la fonctionnalité du Jupyter Notebook résultant, toute la classe a été incluse ici.

Définition de la Classe

```
In [5]: class NaiveMLP:

        """
        Un perceptron multicouche (MLP) minimal utilisant un algorithme
        d'entraînement par force brute qui ne nécessite pas de calcul
        des dérivées.

        Veuillez noter que l'algorithme d'entraînement proposé est destiné
        uniquement à des fins didactiques et ne doit pas être confondu avec
        un véritable algorithme d'entraînement.
        """
```

Constructeur

```
In [6]: def __init__(self, layer_sizes, step=0.1, seed=None):

        self.sizes = list(layer_sizes)
        self.step = float(step)
        rng = np.random.default_rng(seed)

        # Initialiser les poids et les biais

        self.W = [rng.standard_normal(size=(in_d, out_d)) * 0.5
                   for in_d, out_d in zip(layer_sizes[:-1], layer_sizes[1:])]

        self.b = [np.zeros(out_d) for out_d in layer_sizes[1:]]
```

Mémoriser le nombre de couches, le nombre d'unités par couche et la taille du pas de l'algorithme d'apprentissage. Initialiser les poids (W) et les biais (b).

Python

```
In [7]: seed = 0

        rng = np.random.default_rng(seed)

        layer_sizes = [2, 4, 4, 1]

        [(in_d, out_d) for in_d, out_d in zip(layer_sizes[:-1], layer_sizes[1:])]

        [(2, 4), (4, 4), (4, 1)]

        ...
```

```
In [8]: [rng.standard_normal(size=(in_d, out_d)) * 0.5 for in_d, out_d in zip(layer_
```

```
[array([[ 0.06286511, -0.06605243,  0.32021133,  0.05245006],
        [-0.26783469,  0.18079753,  0.65200002,  0.47354048]]),
 array([[ -0.35186762, -0.63271074, -0.31163723,  0.02066299],
        [-1.16251539, -0.10939583, -0.62295547, -0.36613368],
        [-0.27212949, -0.15815008,  0.20581527,  0.52125668],
        [-0.06426733,  0.68323174, -0.33259734,  0.17575504]]),
 array([[ 0.45173509],
        [ 0.04700615],
        [-0.37174962],
        [-0.46086269]])]
```

Combien de poids a ce réseau?

Python

```
In [9]: [out_d for out_d in layer_sizes[1:]]
```

```
[4, 4, 1]
```

```
...
```

```
In [10]: [np.zeros(out_d) for out_d in layer_sizes[1:]]
```

```
[array([0., 0., 0., 0.]), array([0., 0., 0., 0.]), array([0.])]
```

Quel est le nombre de termes de biais dans ce réseau ?

Le réseau se compose d'un total de 37 paramètres, qui incluent 28 poids et 9 termes de biais.

Passage Avant

```
In [11]: def forward(self, X):
          """
          Passage avant simple : calculer les activations de sortie.
          X : forme (N, input_dim)
          Retourne : probabilités de sortie, forme (N,)
          """

          a = X
          for W, b in zip(self.W, self.b):
              a = sigmoid(a @ W + b)

          return a.ravel()
```

Calcul des activations de sortie. Déterminer la probabilité de chaque instance dans le jeu de données X d'appartenir à la classe 1.

La méthode procède couche par couche, de manière séquentielle. Dans notre exemple en cours, cela implique trois couches de traitement distinctes.

Que sont `W` et `b` ?

`W` et `b` sont des listes, chacune contenant trois éléments. La liste `W` comprend des matrices de poids de dimensions 2×4 , 4×4 , et 4×1 , tandis que `b` se compose de tableaux de biais de tailles 4, 4, et 1, respectivement.

Quel est le but de `zip(self.W, self.b)` ?

Cette fonction associe chaque matrice de poids à son tableau de biais correspondant, ce qui donne trois tuples, un pour chacune des deuxième, troisième et quatrième couches.

Que représente `X` ?

L'utilisation de `NumPy` rend le code compact, mais il est important de reconnaître les détails sous-jacents. Le paramètre `X` encapsule l'ensemble du jeu de données, comprenant 200 échantillons avec 2 caractéristiques chacun. À chaque itération de la boucle, les activations pour toutes les unités de la couche actuelle sont calculées pour tous les exemples.

Faire des prédictions

```
In [12]: def predict(self, X, threshold=0.5):  
         return (self.forward(X) >= threshold).astype(int)
```

En effet, prédictions, au pluriel.

La méthode `forward` produit un tableau de probabilités, chacune variant de 0 à 1, indiquant la probabilité qu'un exemple particulier, x_i , appartienne à la classe 1. En évaluant l'expression `self.forward(X) >= threshold`, nous obtenons un tableau de valeurs booléennes : `True` si la probabilité dépasse le `seuil` spécifié, et `False` sinon. Ces valeurs booléennes sont ensuite converties en valeurs binaires de zéros et de uns.

Il est important de noter que le fait d'ajuster la limite de décision, `threshold`, permet de manipuler le compromis précision-rappel, offrant ainsi de la flexibilité dans les performances du modèle.

Calcul du coût

```
In [13]: def loss(self, X, y):  
         return bce_loss(y, self.forward(X))
```

La méthode en question calcule la perte pour l'ensemble du jeu de données.

Que se passerait-il si nous retournions `bce_loss(y, self.predict(X))` au lieu de `bce_loss(y, self.forward(X))` ?

Discussion

À l'exception de l'algorithme d'entraînement, notre implémentation de réseau de neurones est maintenant complète.

Pour ceux qui ne sont pas familiers avec l'algorithme de rétropropagation, comment proposez-vous d'apprendre les paramètres du modèle ?

...

Changer les poids → calculer la perte → conserver si meilleur → répéter.

Pseudocode

```
pseudocode
pour chaque époque :
    pour chaque paramètre w dans le réseau :
        meilleur_delta = 0
        meilleure_perte = perte_actuelle
        pour delta dans [-0.01, 0, +0.01] :
            w_temp = w + delta
            perte_temp = calculer_perte(w_temp, données)
            si perte_temp < meilleure_perte :
                meilleure_perte = perte_temp
                meilleur_delta = delta
        w += meilleur_delta
```

Il est important de noter que cet algorithme est **fondamentalement distinct de la rétropropagation**, qui est largement utilisée en pratique. La raison principale de son introduction est sa simplicité, notamment l'**absence de dérivées partielles**.

L'algorithme fonctionne sur plusieurs époques, au cours desquelles la précision prédictive pour l'ensemble d'entraînement est progressivement améliorée à chaque itération.

Lors de chaque itération, l'algorithme évalue s'il faut diminuer, augmenter ou maintenir la valeur actuelle de chaque paramètre.

Une fois l'ajustement optimal pour chaque paramètre déterminé, tous les changements sont mis en œuvre simultanément. Cette approche ressemble à la technique de descente de gradient discutée plus tôt dans le semestre et offre l'avantage d'une parallélisation simple.

Python

```
In [14]: def _all_param_tags(self):  
  
        """  
        Génère des tags référenciant chaque paramètre scalaire :  
        ('W', layer_idx, i, j) ou ('b', layer_idx, j)  
        """  
  
        for l, W in enumerate(self.W):  
            for i in range(W.shape[0]):  
                for j in range(W.shape[1]):  
                    yield ('W', l, i, j)  
            for j in range(self.b[l].shape[0]):  
                yield ('b', l, j)
```

Le code ci-dessus implémente un générateur, qui est un concept Python qui semble simple, mais qui est très puissant.

Un **générateur** est un type de fonction qui peut *mettre en pause* son exécution et *reprendre plus tard*. Il produit une séquence de valeurs, une à la fois, sans les stocker toutes en mémoire. Vous en créez un en utilisant le mot-clé `yield`.

Voici un exemple.

```
def countdown(n):  
    while n > 0:  
        yield n          # "yield" une valeur et met en pause  
        n -= 1
```

Vous pouvez l'appeler trois fois, puis il lèvera `StopIteration`.

```
c = countdown(3)  
print(next(c)) # 3  
print(next(c)) # 2  
print(next(c)) # 1  
try:  
    print(next(c))  
except StopIteration:  
    print("Caught StopIteration.")  
  
3  
2  
1  
Caught StopIteration.
```

Les générateurs sont souvent utilisés dans des boucles `for`.

```
for value in countdown(3):  
    print(value)
```

3
2
1

Les fonctions `enumerate` et `zip` renvoient toutes deux des itérateurs, qui fonctionnent de manière similaire aux générateurs en facilitant l'évaluation paresseuse. Cette approche génère des éléments dynamiquement pendant l'itération, évitant ainsi le besoin de stocker tous les éléments en mémoire simultanément.

Python

```
In [18]: class Demo:

    def __init__(self, layer_sizes):
        self.sizes = list(layer_sizes)
        rng = np.random.default_rng(0)
        self.W = [rng.standard_normal(size=(in_d, out_d)) * 0.5
                   for in_d, out_d in zip(layer_sizes[:-1], layer_sizes[1:])]
        self.b = [np.zeros(out_d) for out_d in layer_sizes[1:]]

    def _all_param_tags(self):

        """
        Génère des étiquettes référenciant chaque paramètre scalaire :
        ('W', layer_idx, i, j) ou ('b', layer_idx, j)
        """

        for l, W in enumerate(self.W):
            for i in range(W.shape[0]):
                for j in range(W.shape[1]):
                    yield ('W', l, i, j)
            for j in range(self.b[l].shape[0]):
                yield ('b', l, j)

    def show(self):

        for tag in self._all_param_tags():
            print(tag)

In [19]: d = Demo([2,4,4,1])
d.show()
```

```

('W', 0, 0, 0)
('W', 0, 0, 1)
('W', 0, 0, 2)
('W', 0, 0, 3)
('W', 0, 1, 0)
('W', 0, 1, 1)
('W', 0, 1, 2)
('W', 0, 1, 3)
('b', 0, 0)
('b', 0, 1)
('b', 0, 2)
('b', 0, 3)
('W', 1, 0, 0)
('W', 1, 0, 1)
('W', 1, 0, 2)
('W', 1, 0, 3)
('W', 1, 1, 0)
('W', 1, 1, 1)
('W', 1, 1, 2)
('W', 1, 1, 3)
('W', 1, 2, 0)
('W', 1, 2, 1)
('W', 1, 2, 2)
('W', 1, 2, 3)
('W', 1, 3, 0)
('W', 1, 3, 1)
('W', 1, 3, 2)
('W', 1, 3, 3)
('b', 1, 0)
('b', 1, 1)
('b', 1, 2)
('b', 1, 3)
('W', 2, 0, 0)
('W', 2, 1, 0)
('W', 2, 2, 0)
('W', 2, 3, 0)
('b', 2, 0)

```

Python

In [20]:

```

def _get_param(self, tag):
    kind = tag[0]
    if kind == 'W':
        _, l, i, j = tag
        return self.W[l][i, j]
    else:
        _, l, j = tag
        return self.b[l][j]

```

Étant donné un `tag`, soit `('W', l, i, j)` ou `('b', l, j)`, la méthode récupère le poids ou le biais correspondant aux indices fournis. `l` désigne la **couche**; `i` et `j` sont les indices de ligne et de colonne de `W[l]`, ou `j` est un indice dans `b[l]`.

Python

```
In [21]: def _set_param(self, tag, val):
          kind = tag[0]
          if kind == 'W':
              _, l, i, j = tag
              self.W[l][i, j] = val
          else:
              _, l, j = tag
              self.b[l][j] = val
```

Logique similaire, mais la méthode met à jour `self.W[l][i, j]` ou `self.b[l][j]` `= val`, selon le type de tag.

Entraînement (apprentissage)

```
In [22]: def train(self, X, y, epochs=10, verbose=True):

          for ep in range(1, epochs + 1):

              base_loss = self.loss(X, y)
              updates = {}

              # Examiner tous les paramètres
              for tag in self._all_param_tags():

                  theta = self._get_param(tag)
                  best_delta = 0.0
                  best_loss = base_loss

                  for delta in (-self.step, 0.0, +self.step):
                      self._set_param(tag, theta + delta)
                      trial_loss = self.loss(X, y)
                      if trial_loss < best_loss:
                          best_loss = trial_loss
                          best_delta = delta

                  # restaurer l'original
                  self._set_param(tag, theta)
                  updates[tag] = best_delta

              # Appliquer tous les deltas ensemble
              for tag, d in updates.items():
                  if d != 0.0:
                      self._set_param(tag, self._get_param(tag) + d)

              new_loss = self.loss(X, y)

              if verbose:
                  print(f"Époque {ep:3d}: perte {base_loss:.5f} → {new_loss:.5f}")

              # arrêt anticipé optionnel
```

```
if abs(new_loss - base_loss) < 1e-12:
    break
```

“Simultané” $\approx$ une étape de style Jacobi : vous choisissez des deltas par paramètre par rapport à la même ligne de base, puis vous les appliquez tous en même temps. Les interactions entre les paramètres sont ignorées pendant que vous les choisissez.

Ouf!

Est-ce que ça fonctionne ?

```
In [23]: from sklearn.model_selection import train_test_split
from sklearn.metrics import accuracy_score

X_train, X_test, y_train, y_test = train_test_split(
    X, y, test_size=0.25, random_state=42, stratify=y
)

model = NaiveMLP([2, 4, 4, 1], step=0.06, seed=0)

print("Loss initiale :", model.loss(X_train, y_train))

model.train(X_train, y_train, epochs=100)

print("Exactitude sur l'entraînement :", accuracy_score(y_train, model.predict(X_train)))
print("Exactitude sur le test :", accuracy_score(y_test, model.predict(X_test)))
```

Loss initiale : 0.7001969055705487

Époque 1 : perte 0.70020 → 0.69315
Époque 2 : perte 0.69315 → 0.69547
Époque 3 : perte 0.69547 → 0.69387
Époque 4 : perte 0.69387 → 0.69542
Époque 5 : perte 0.69542 → 0.69384
Époque 6 : perte 0.69384 → 0.69537
Époque 7 : perte 0.69537 → 0.69382
Époque 8 : perte 0.69382 → 0.69531
Époque 9 : perte 0.69531 → 0.69379
Époque 10 : perte 0.69379 → 0.69525
Époque 11 : perte 0.69525 → 0.69361
Époque 12 : perte 0.69361 → 0.69517
Époque 13 : perte 0.69517 → 0.69331
Époque 14 : perte 0.69331 → 0.69503
Époque 15 : perte 0.69503 → 0.69298
Époque 16 : perte 0.69298 → 0.69468
Époque 17 : perte 0.69468 → 0.69257
Époque 18 : perte 0.69257 → 0.69364
Époque 19 : perte 0.69364 → 0.69200
Époque 20 : perte 0.69200 → 0.69173
Époque 21 : perte 0.69173 → 0.69118
Époque 22 : perte 0.69118 → 0.68965
Époque 23 : perte 0.68965 → 0.68970
Époque 24 : perte 0.68970 → 0.68716
Époque 25 : perte 0.68716 → 0.68672
Époque 26 : perte 0.68672 → 0.68417
Époque 27 : perte 0.68417 → 0.68170
Époque 28 : perte 0.68170 → 0.67855
Époque 29 : perte 0.67855 → 0.67406
Époque 30 : perte 0.67406 → 0.66867
Époque 31 : perte 0.66867 → 0.66203
Époque 32 : perte 0.66203 → 0.65492
Époque 33 : perte 0.65492 → 0.64672
Époque 34 : perte 0.64672 → 0.63852
Époque 35 : perte 0.63852 → 0.62948
Époque 36 : perte 0.62948 → 0.61977
Époque 37 : perte 0.61977 → 0.60918
Époque 38 : perte 0.60918 → 0.59844
Époque 39 : perte 0.59844 → 0.58893
Époque 40 : perte 0.58893 → 0.57598
Époque 41 : perte 0.57598 → 0.56310
Époque 42 : perte 0.56310 → 0.55035
Époque 43 : perte 0.55035 → 0.53809
Époque 44 : perte 0.53809 → 0.52214
Époque 45 : perte 0.52214 → 0.50660
Époque 46 : perte 0.50660 → 0.49073
Époque 47 : perte 0.49073 → 0.47591
Époque 48 : perte 0.47591 → 0.45758
Époque 49 : perte 0.45758 → 0.44074
Époque 50 : perte 0.44074 → 0.42251
Époque 51 : perte 0.42251 → 0.41069
Époque 52 : perte 0.41069 → 0.38858
Époque 53 : perte 0.38858 → 0.36998
Époque 54 : perte 0.36998 → 0.35227
Époque 55 : perte 0.35227 → 0.34356

```
Époque 56 : perte 0.34356 → 0.32577
Époque 57 : perte 0.32577 → 0.31462
Époque 58 : perte 0.31462 → 0.29240
Époque 59 : perte 0.29240 → 0.27704
Époque 60 : perte 0.27704 → 0.25851
Époque 61 : perte 0.25851 → 0.25409
Époque 62 : perte 0.25409 → 0.23884
Époque 63 : perte 0.23884 → 0.23260
Époque 64 : perte 0.23260 → 0.21815
Époque 65 : perte 0.21815 → 0.21238
Époque 66 : perte 0.21238 → 0.19964
Époque 67 : perte 0.19964 → 0.19350
Époque 68 : perte 0.19350 → 0.17787
Époque 69 : perte 0.17787 → 0.16963
Époque 70 : perte 0.16963 → 0.15270
Époque 71 : perte 0.15270 → 0.14804
Époque 72 : perte 0.14804 → 0.13478
Époque 73 : perte 0.13478 → 0.13357
Époque 74 : perte 0.13357 → 0.12381
Époque 75 : perte 0.12381 → 0.12041
Époque 76 : perte 0.12041 → 0.10789
Époque 77 : perte 0.10789 → 0.10512
Époque 78 : perte 0.10512 → 0.09204
Époque 79 : perte 0.09204 → 0.08493
Époque 80 : perte 0.08493 → 0.07447
Époque 81 : perte 0.07447 → 0.07243
Époque 82 : perte 0.07243 → 0.06423
Époque 83 : perte 0.06423 → 0.06479
Époque 84 : perte 0.06479 → 0.06053
Époque 85 : perte 0.06053 → 0.05940
Époque 86 : perte 0.05940 → 0.05501
Époque 87 : perte 0.05501 → 0.05465
Époque 88 : perte 0.05465 → 0.05370
Époque 89 : perte 0.05370 → 0.05036
Époque 90 : perte 0.05036 → 0.04376
Époque 91 : perte 0.04376 → 0.04596
Époque 92 : perte 0.04596 → 0.04283
Époque 93 : perte 0.04283 → 0.04213
Époque 94 : perte 0.04213 → 0.04031
Époque 95 : perte 0.04031 → 0.03879
Époque 96 : perte 0.03879 → 0.03629
Époque 97 : perte 0.03629 → 0.03574
Époque 98 : perte 0.03574 → 0.03499
Époque 99 : perte 0.03499 → 0.03293
Époque 100 : perte 0.03293 → 0.03075
Exactitude sur l'entraînement : 1.0
Exactitude sur le test : 1.0
```

Notre algorithme d'entraînement est fragile. Obtenir ces résultats a nécessité d'expérimenter avec `step` et `seed` .

Visualisation

In [24]: *# Plot helper: decision boundary in the original (x1, x2) plane*

```
def plot_decision_boundary(model, X, y, title="Frontière de décision du MLP")
    # grille sur le plan d'entrée
    pad = 0.3
    x1_min, x1_max = X[:,0].min()-pad, X[:,0].max()+pad
    x2_min, x2_max = X[:,1].min()-pad, X[:,1].max()+pad

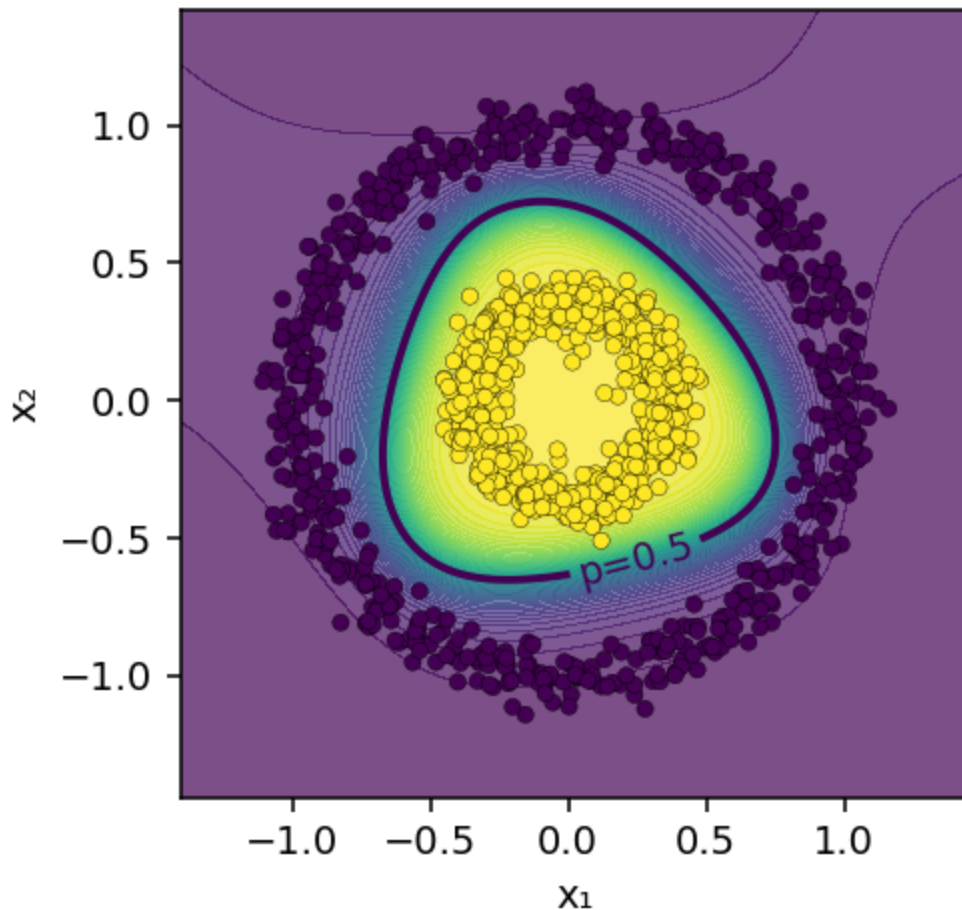
    xx, yy = np.meshgrid(
        np.linspace(x1_min, x1_max, 400),
        np.linspace(x2_min, x2_max, 400)
    )
    grid = np.c_[xx.ravel(), yy.ravel()]

    # prédire les probabilités sur la grille
    p = model.forward(grid).reshape(xx.shape)

    # probabilités remplies + contour p=0.5 + points de données
    plt.figure(figsize=(3.75, 3.75), dpi=140)
    plt.contourf(xx, yy, p, levels=50, alpha=0.7)
    cs = plt.contour(xx, yy, p, levels=[0.5], linewidths=2)
    plt.scatter(X[:,0], X[:,1], c=y, s=18, edgecolor="k", linewidth=0.2)
    plt.clabel(cs, fmt="{0.5: 'p=0.5'}")
    plt.title(title)
    plt.xlabel("x1")
    plt.ylabel("x2")
    plt.tight_layout()
    plt.show()

plot_decision_boundary(model, X, y)
```

Frontière de décision du MLP naïf



Données de type XOR

```
In [25]: n_samples = 800
rng = np.random.default_rng(42)

X = rng.uniform(-6, 6, size=(n_samples, 2))
x1, x2 = X[:, 0], X[:, 1]

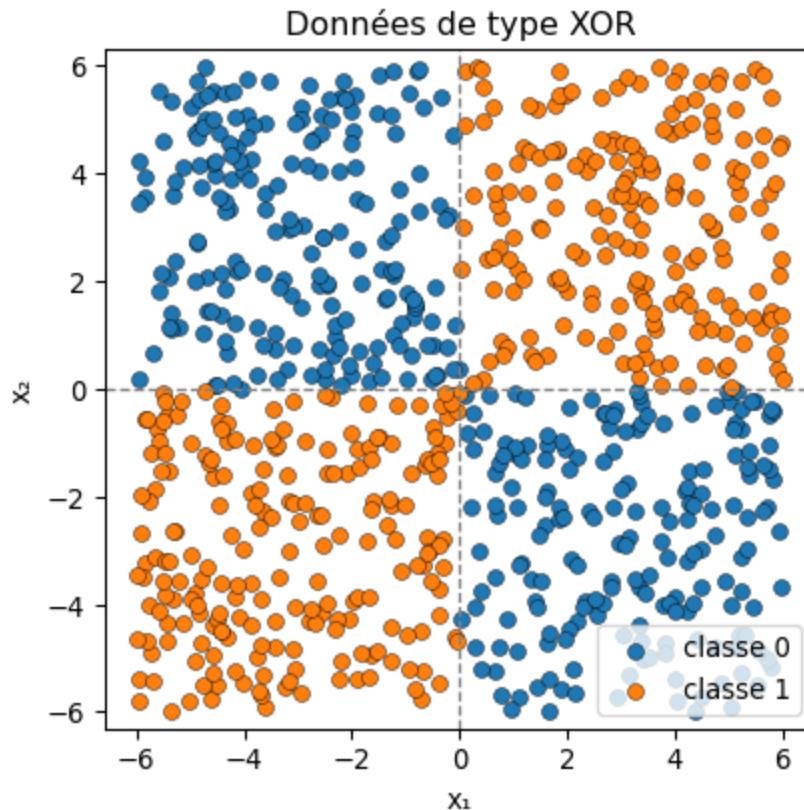
y = ((x1 * x2) > 0).astype(int)

plt.figure(figsize=(4.5, 4.5))
plt.scatter(X[y == 0, 0], X[y == 0, 1],
            color="C0", label="classe 0", edgecolor="k", linewidth=0.3)
plt.scatter(X[y == 1, 0], X[y == 1, 1],
            color="C1", label="classe 1", edgecolor="k", linewidth=0.3)

plt.axhline(0, color="gray", linestyle="--", linewidth=1)
plt.axvline(0, color="gray", linestyle="--", linewidth=1)

plt.xlabel("x1")
plt.ylabel("x2")
plt.title("Données de type XOR")
plt.xlim(-6, 6)
```

```
plt.ylim(-6, 6)
plt.axis("equal")
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()
```



La même architecture, 2, 4, 4, 1, fonctionnerait-elle pour le jeu de données de type XOR ?

Données de type XOR (suite)

```
In [26]: X_train, X_test, y_train, y_test = train_test_split(
          X, y, test_size=0.25, random_state=42, stratify=y
        )

model = NaiveMLP([2, 4, 4, 1], step=0.06, seed=0)

print("Perte initiale :", model.loss(X_train, y_train))

model.train(X_train, y_train, epochs=1000, verbose=False)

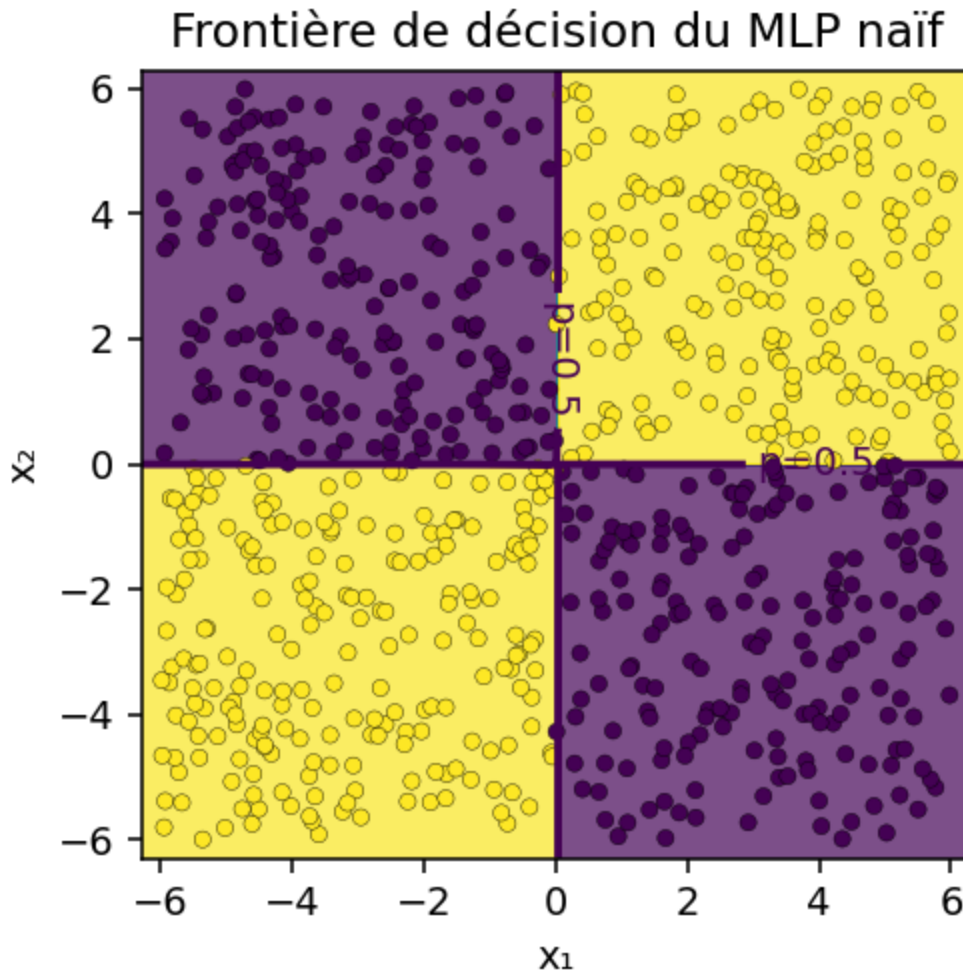
print("Perte finale :", model.loss(X_train, y_train))

print("Exactitude sur l'ensemble d'entraînement :", accuracy_score(y_train,
print("Exactitude sur l'ensemble de test :", accuracy_score(y_test, model.pr
```

Perte initiale : 0.7029764953722529
Perte finale : 3.4494531195516116e-07
Exactitude sur l'ensemble d'entraînement : 1.0
Exactitude sur l'ensemble de test : 0.99

Données de type XOR (suite)

```
In [27]: plot_decision_boundary(model, X, y)
```



Notre réseau neuronal simple, ainsi que son algorithme d'entraînement naïf, a été évalué sur deux tests distincts. Malgré la simplicité du modèle, il a réussi à apprendre des frontières de décision significativement différentes sans nécessiter l'ingénierie de fonctionnalités supplémentaires.

Pour la simplicité et la clarté dans cet exemple, nous avons utilisé les données brutes sans appliquer de mise à l'échelle. Cependant, dans des scénarios pratiques, il est courant de mettre à l'échelle ou de normaliser les caractéristiques avant d'entraîner des réseaux neuronaux ou tout modèle reposant sur l'optimisation par gradient. La mise à l'échelle facilite une convergence plus rapide et plus stable des algorithmes d'entraînement, bien qu'elle introduise des étapes de prétraitement et de post-traitement supplémentaires. Puisque l'objectif principal ici est de comprendre le

mécanisme d'entraînement plutôt que d'optimiser pour l'efficacité, nous avons délibérément choisi de ne pas inclure la mise à l'échelle dans ce cas.

Avant l'entraînement,

```
from sklearn.preprocessing import StandardScaler
```

```
scaler = StandardScaler()
```

```
X_train = scaler.fit_transform(X_train)
```

```
X_test = scaler.transform(X_test)
```

Après l'entraînement, lorsque vous souhaitez visualiser la frontière de décision dans l'espace des caractéristiques d'origine, vous devez redimensionner les coordonnées à l'aide de `scaler.inverse_transform`.

Inconvénients

- Inefficacité computationnelle.
- Limitations de scalabilité.
- Taille de pas fixe ($\pm\eta$) manque d'adaptabilité.
- Mauvaise coordination des paramètres.
- Absence d'informations sur la direction ou la magnitude.
- Absence de fonctionnalités sophistiquées de l'optimiseur.
- Risque de sur-apprentissage ou de mauvaise généralisation.
- Inefficacité computationnelle : essayer chaque paramètre avec trois deltas à chaque époque s'adapte mal à mesure que la taille du modèle augmente.
- Taille de pas fixe ($\pm\eta$) manque d'adaptabilité : trop petit $\rightarrow$ très lent ; trop grand $\rightarrow$ dépassement/oscillation.
- Mauvaise coordination des paramètres : chaque paramètre est mis à jour sans tenir compte des interactions $\rightarrow$ convergence plus lente dans les réseaux couplés.
- Recherche locale discrète (plutôt que basée sur les dérivées) : absence d'informations sur la direction ou la magnitude $\rightarrow$ de nombreuses époques nécessaires, risque de zigzag ou de blocage.
- Limitations de scalabilité : évaluation complète de la perte par changement de paramètre $\rightarrow$ infaisable pour de grands ensembles de données ou de nombreux paramètres.

- Absence de fonctionnalités sophistiquées de l'optimiseur : pas de momentum, de taux adaptatifs, de régularisation intégrée → performance et fiabilité réduites.
- Risque de sur-apprentissage ou de mauvaise généralisation : entraînement agressif sur la perte complète du lot sans régularisation intégrée peut trop s'adapter aux données d'entraînement.
- Aperçu limité de l'ampleur des mises à jour : seules les options $\pm\eta$ ou 0 signifient pas de réglage fin de la taille de pas par paramètre ou époque.

Notation

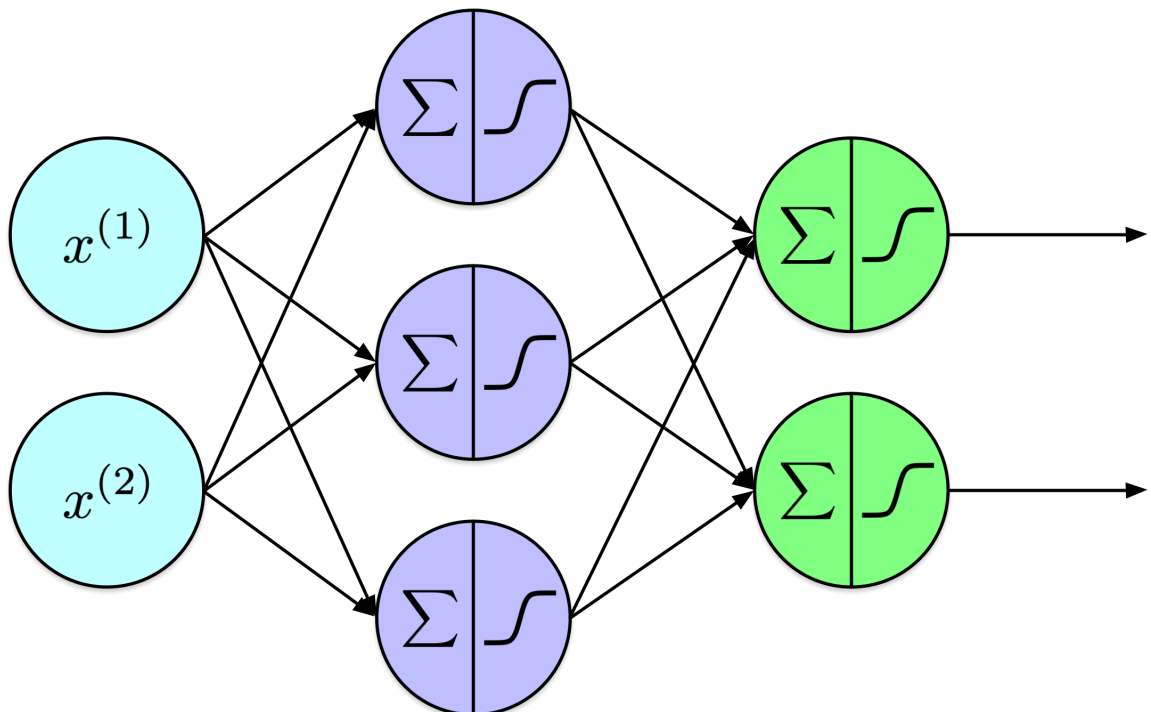
Notation

Un **perceptron à deux couches** calcule :

$$\hat{y} = \phi_2(\phi_1(X))$$

où

$$\phi_l(Z) = \phi(W_l Z_l + b_l)$$



Où ϕ est une fonction d'activation, W une matrice de poids, X une matrice d'entrée, et b un vecteur de biais.

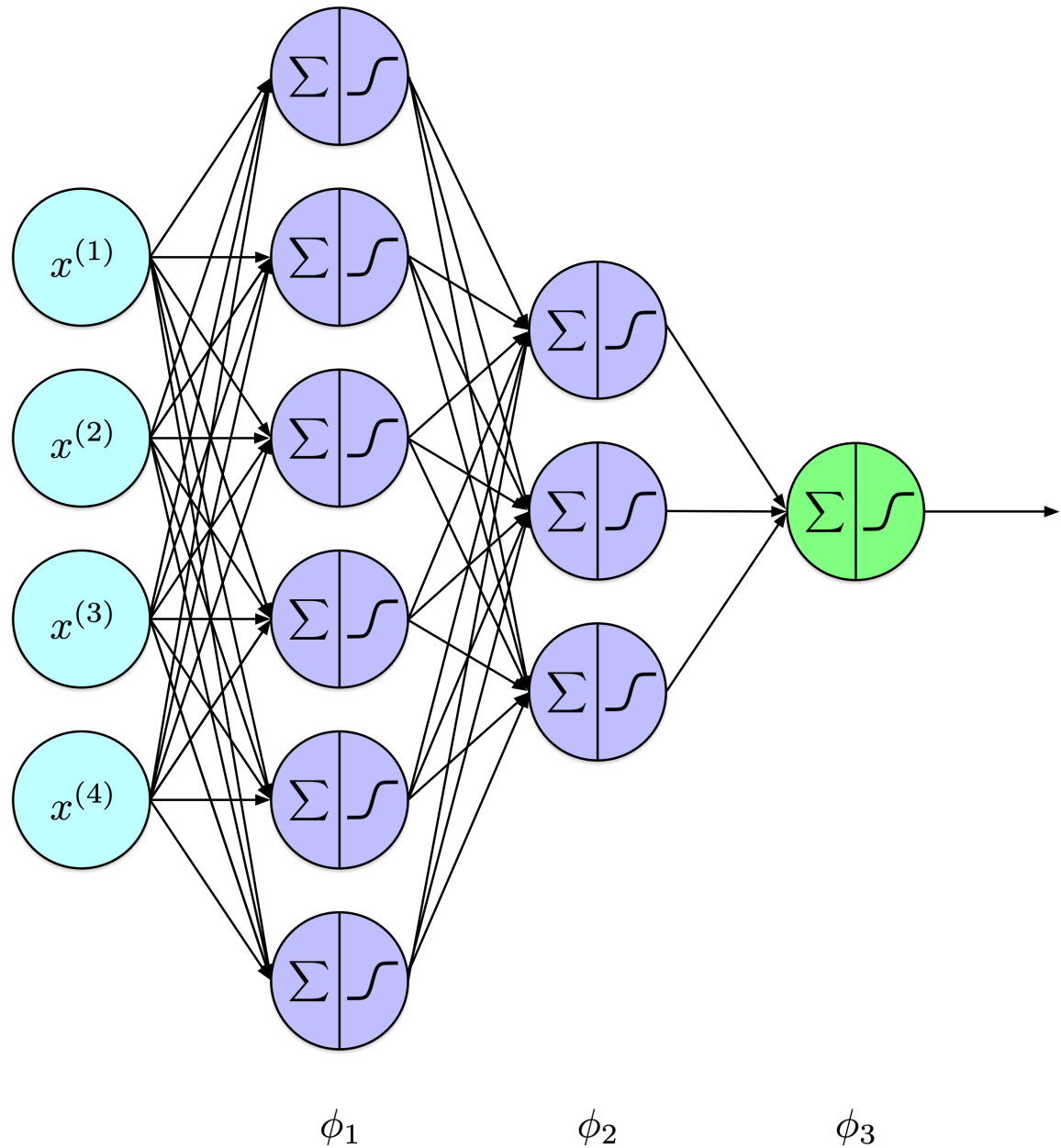
Notation

Un perceptron à **3 couches** calcule :

$$\hat{y} = \phi_3(\phi_2(\phi_1(X)))$$

où

$$\phi_l(Z) = \phi(W_l Z_l + b_l)$$



Notation

Un **perceptron à k couches** calcule :

$$\hat{y} = \phi_k(\dots \phi_2(\phi_1(X)) \dots)$$

où

$$\phi_l(Z) = \phi(W_l Z_l + b_l)$$

Un réseau feed-forward présente une structure cohérente, où chaque couche exécute le même type de calcul sur des entrées variées. Plus précisément, l'entrée de la couche l est la sortie de la couche $l - 1$.

Dans cette notation, il est souligné que seule la première couche reçoit directement les attributs d'entrée. Chaque couche suivante traite ensuite les activations de la couche précédente, facilitant l'apprentissage de nouvelles représentations. Cela met en évidence l'architecture cohérente des réseaux de neurones à propagation avant. Comme nous l'explorerons dans le prochain cours, augmenter le nombre de couches n'augmente pas intrinsèquement la complexité de l'algorithme.

Prologue

Résumé

- Présentation de l'apprentissage profond comme une approximation de fonction en couches à travers différentes tâches.
- Description des réseaux de neurones feedforward (FNNs) : entrées → couches cachées → sorties ; l'information ne circule que vers l'avant.
- Mention des unités utilisant le biais et les activations ; explication de l'importance de la non-linéarité.
- Revue des plages et du comportement dérivé des fonctions sigmoid/tanh/ReLU.
- Énoncé du Théorème d'Approximation Universelle et de ses limites pratiques.
- Construction d'un petit MLP et calcul des prédictions et de la perte BCE sur des données jouets.
- Démonstration d'un algorithme d'entraînement naïf, non basé sur le gradient ; il fonctionnait mais était peu évolutif et fragile.
- Établissement d'une notation compacte pour les couches,
 $\hat{y} = \phi_k(\dots \phi_2(\phi_1(X)) \dots)$ où $\phi_l(Z) = \phi(W_l Z_l + b_l)$, en vue de préparer le backpropagation.

Prochain cours

- Nous introduirons le backpropagation, et discuterons du gradient évanescent, du softmax et de la régularisation.

Références

Cybenko, George V. 1989. « Approximation by superpositions of a sigmoidal function ». *Mathematics of Control, Signals and Systems* 2: 303-14.

<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:3958369>.

Géron, Aurélien. 2022. *Hands-on Machine Learning with Scikit-Learn, Keras, and TensorFlow*. 3^e éd. O'Reilly Media, Inc.

He, Kaiming, Xiangyu Zhang, Shaoqing Ren, et Jian Sun. 2016. « Deep Residual Learning for Image Recognition ». In *2016 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 770-78. <https://doi.org/10.1109/CVPR.2016.90>.

Hornik, Kurt, Maxwell Stinchcombe, et Halbert White. 1989. « Multilayer feedforward networks are universal approximators ». *Neural Networks* 2 (5): 359-66. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0893-6080\(89\)90020-8](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0893-6080(89)90020-8).

Russell, Stuart, et Peter Norvig. 2020. *Artificial Intelligence: A Modern Approach*. 4^e éd. Pearson. <http://aima.cs.berkeley.edu/>.

Marcel **Turcotte**

Marcel.Turcotte@uOttawa.ca

École de **science informatique** et de génie électrique (**SIGE**)

Université d'Ottawa