

Recherche informée

CSI 4106 - Automne 2025

Marcel Turcotte

Version: nov. 7, 2025 08h58

Préambule

Message du jour



7 U of T community members named in [Observer A.I. Power Index](#), 2025-10-08.

Objectifs d'apprentissage

- **Comprendre** les stratégies de recherche informée et le rôle des fonctions heuristiques dans l'efficacité de la recherche.
- **Implémenter** et comparer BFS, DFS, et la recherche par meilleur choix (Best-First Search) en utilisant le problème du puzzle à 8 cases.
- **Analyser** la performance et l'optimalité de divers algorithmes de recherche.

Résumé

Problème de recherche

- Un ensemble d'**états**, appelé **espace d'états**.
- Un **état initial** où l'agent commence.
- Un ou plusieurs **états objectifs** qui définissent des résultats réussis.
- Un ensemble d'**actions** disponibles dans un état donné s .
- Un **modèle de transition** qui détermine l'état suivant en fonction de l'état actuel et de l'action sélectionnée.
- Une **fonction de coût d'action** qui spécifie le coût de l'exécution de l'action a dans l'état s pour atteindre l'état s' .

Définitions

- Un **chemin** est défini comme une séquence d'actions.
- Une **solution** est un chemin qui relie l'état initial à l'état objectif.
- Une **solution optimale** est le chemin avec le coût le plus bas parmi toutes les solutions possibles.

Nous supposons que le **coût du chemin** est la somme des coûts individuels des actions, et que tous les coûts sont positifs. L'espace d'états peut être conceptualisé comme un **graphe**, où les nœuds représentent les états et les arêtes correspondent aux actions.

Dans certains problèmes, plusieurs solutions optimales peuvent exister. Cependant, il est généralement suffisant d'identifier et de rapporter une seule solution optimale. Fournir toutes les solutions optimales peut considérablement augmenter la complexité en temps et en espace pour certains problèmes.

Exemple : 8-Puzzle

```
In [1]: import random
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

random.seed(58)

def is_solvable(tiles):
```

```

# Compter les inversions dans la liste à plat des tuiles (en excluant l'indice 0)
inversions = 0
for i in range(len(tiles)):
    for j in range(i + 1, len(tiles)):
        if tiles[i] != 0 and tiles[j] != 0 and tiles[i] > tiles[j]:
            inversions += 1
return inversions % 2 == 0

def generate_solvable_board():
    # Générer une configuration de plateau aléatoire qui est garantie d'être résoluble
    tiles = list(range(9))
    random.shuffle(tiles)
    while not is_solvable(tiles):
        random.shuffle(tiles)

    return tiles

def plot_board(board, title, num_pos, position):
    ax = plt.subplot(1, num_pos, position)
    ax.set_title(title)
    ax.set_xticks([])
    ax.set_yticks([])

    board = np.array(board).reshape(3, 3).tolist() # Reconfigurer en une grille 3x3

    # Utiliser une carte de couleurs pour afficher les numéros
    cmap = plt.cm.plasma
    norm = plt.Normalize(vmin=-1, vmax=8)

    for i in range(3):
        for j in range(3):
            tile_value = board[i][j]
            color = cmap(norm(tile_value))
            ax.add_patch(plt.Rectangle((j, 2 - i), 1, 1, facecolor=color, edgecolor='black'))
            if tile_value == 0:
                ax.add_patch(plt.Rectangle((j, 2 - i), 1, 1, facecolor='white'))
            else:
                ax.text(j + 0.5, 2 - i + 0.5, str(tile_value),
                        fontsize=16, ha='center', va='center', color='black')

    ax.set_xlim(0, 3)
    ax.set_ylim(0, 3)

```

Exemple : 8-Puzzle

```

In [2]: def main():
    # Générer un plateau initial résoluble
    initial_board = generate_solvable_board()

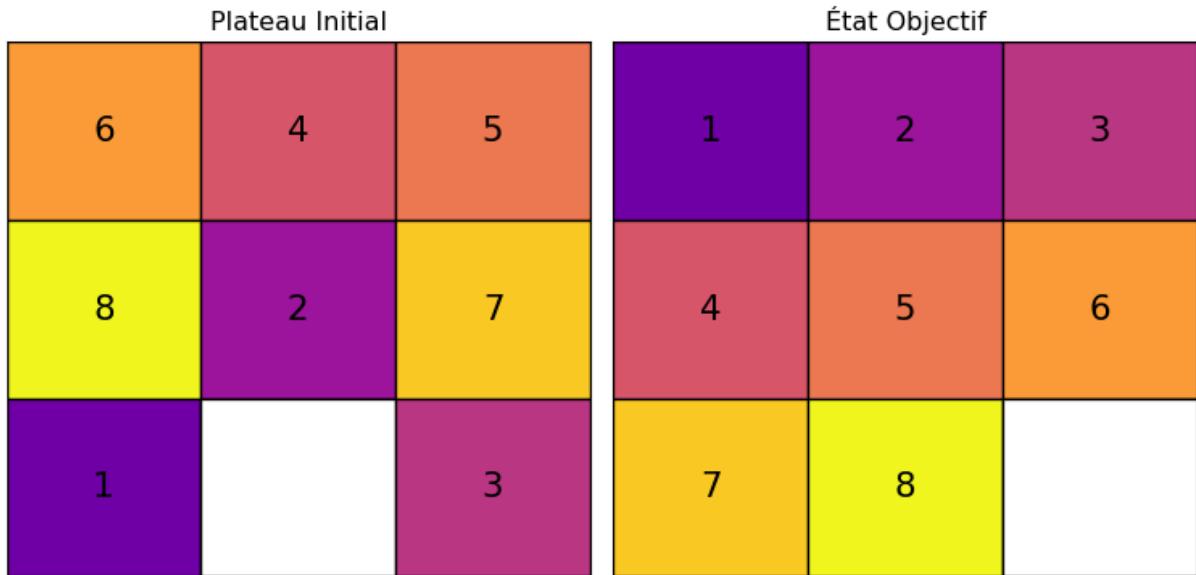
    # Définir l'état objectif
    goal_board = [
        [1, 2, 3],
        [4, 5, 6],
        [7, 8, 0]
    ]

```

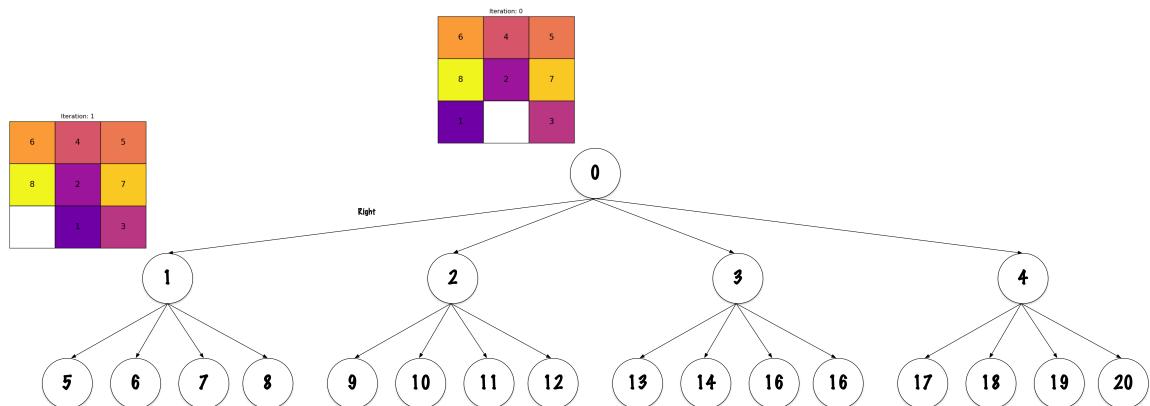
```
]
```

```
# Tracer les deux plateaux
plt.figure(figsize=(8, 4))
plot_board(initial_board, "Plateau Initial", 2, 1)
plot_board(goal_board, "État Objectif", 2, 2)
plt.tight_layout()
plt.show()

main()
```



Arbre de recherche

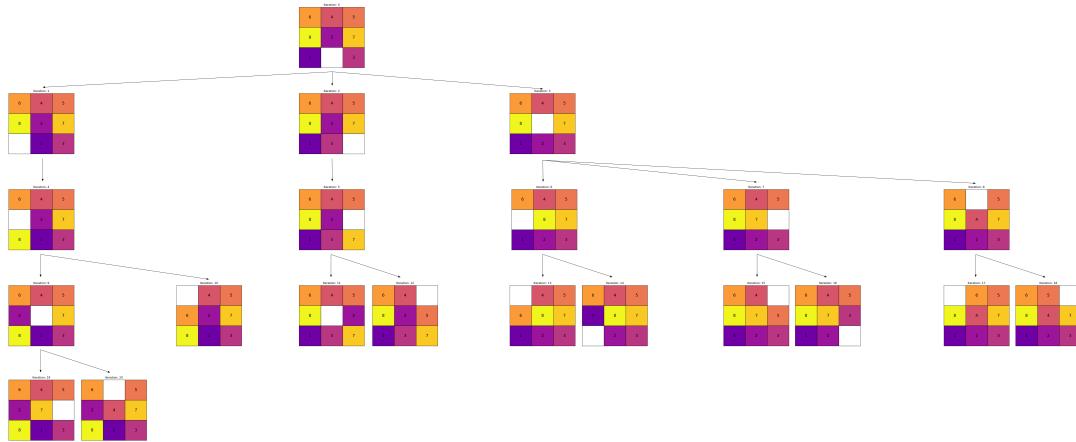


Un **arbre de recherche** est une *structure d'arbre conceptuelle* où les **noeuds** représentent des états dans un **espace d'états**, et les **arêtes** représentent les **actions** possibles, facilitant l'exploration systématique pour trouver un **chemin** d'un **état initial** à un **état objectif**.

Les algorithmes de recherche que nous examinons aujourd'hui construisent un arbre de recherche, où chaque noeud représente un état au sein de l'espace d'états et chaque arête représente une action.

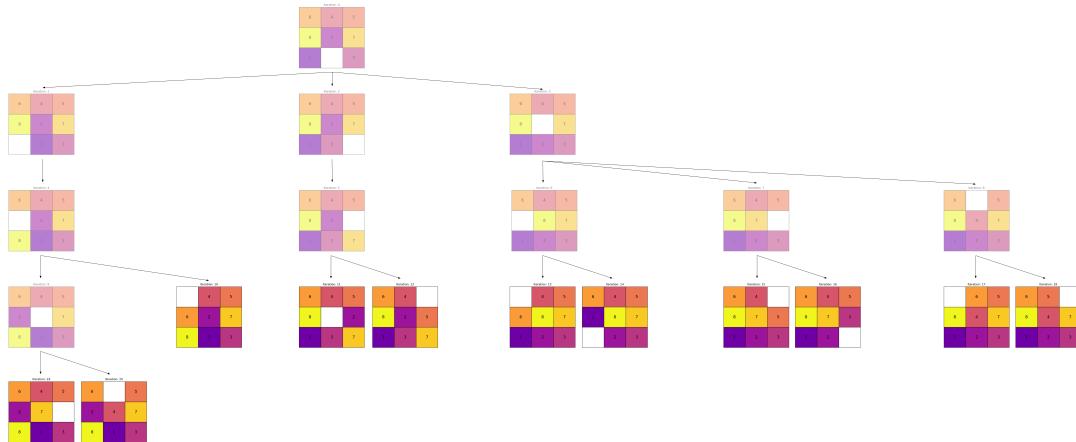
Il est important de distinguer entre l'arbre de recherche et l'espace d'états, qui peut être représenté comme un graphe. La structure de l'arbre de recherche varie en fonction de l'algorithme utilisé pour aborder le problème de recherche.

Arbre de recherche



Un exemple d'**arbre de recherche** pour le **8-Puzzle**. La solution ici est incomplète.

Frontière



Tout état correspondant à un nœud dans l'arbre de recherche est considéré comme **atteint**. Les nœuds de la **frontière** sont ceux qui ont été **atteints** mais n'ont **pas encore été développés**. Ci-dessus, il y a **10 nœuds développés** et **11 nœuds de frontière**, ce qui donne un total de 21 nœuds qui ont été **atteints**.

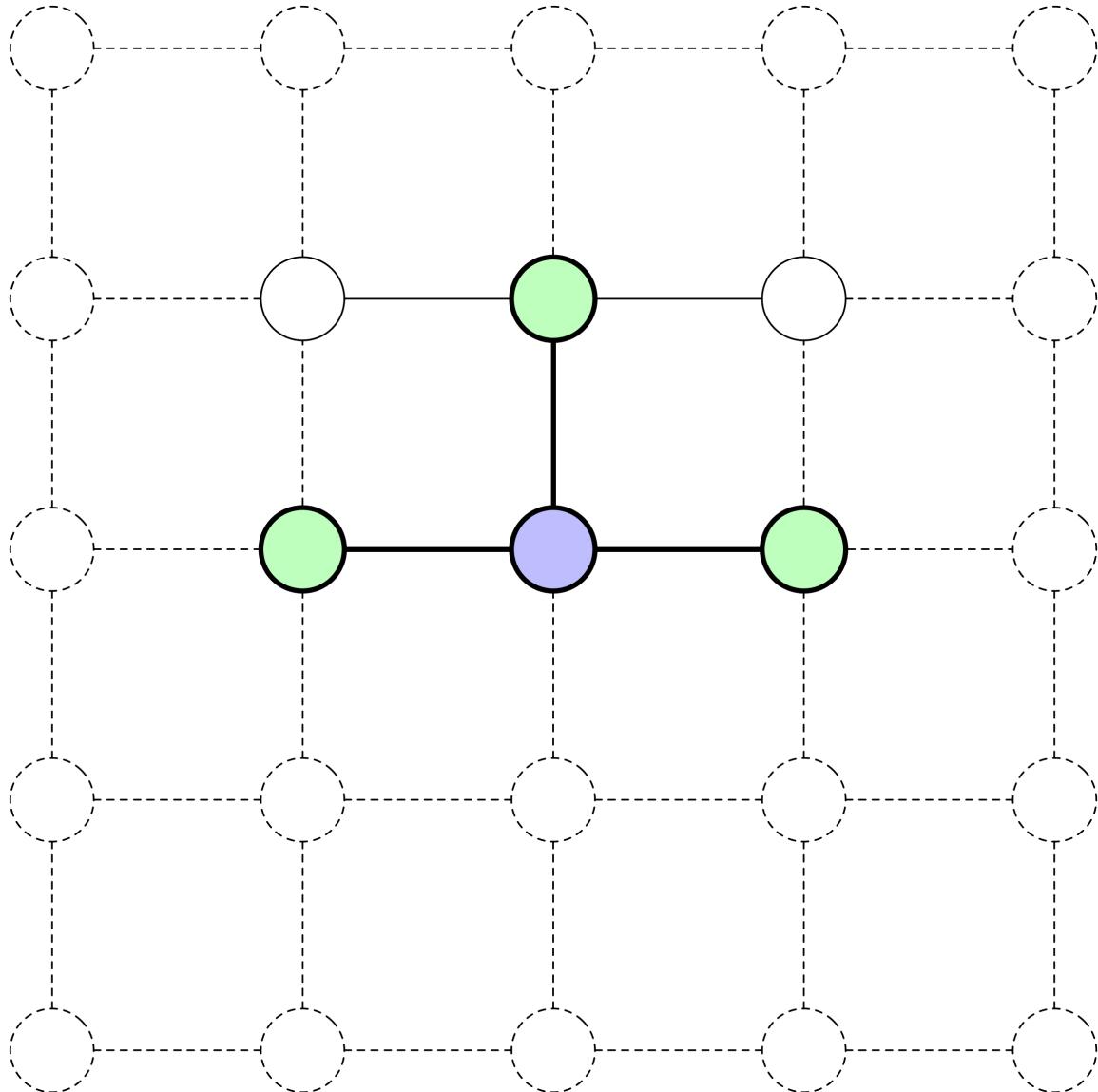
Si aucune solution n'existe, l'algorithme s'arrête lorsque la frontière devient vide.

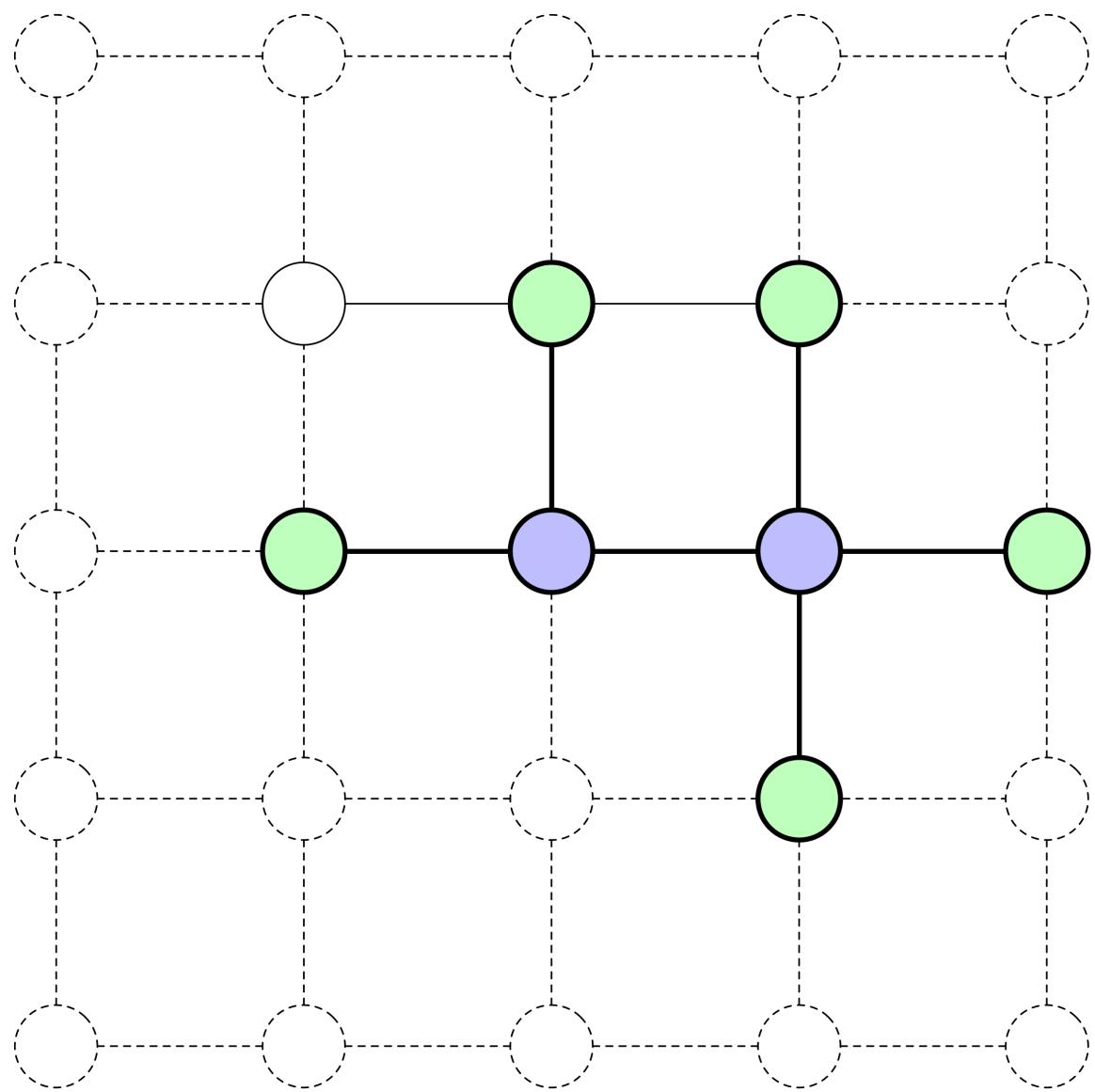
La frontière contient toujours au moins un nœud susceptible de mener à l'objectif.

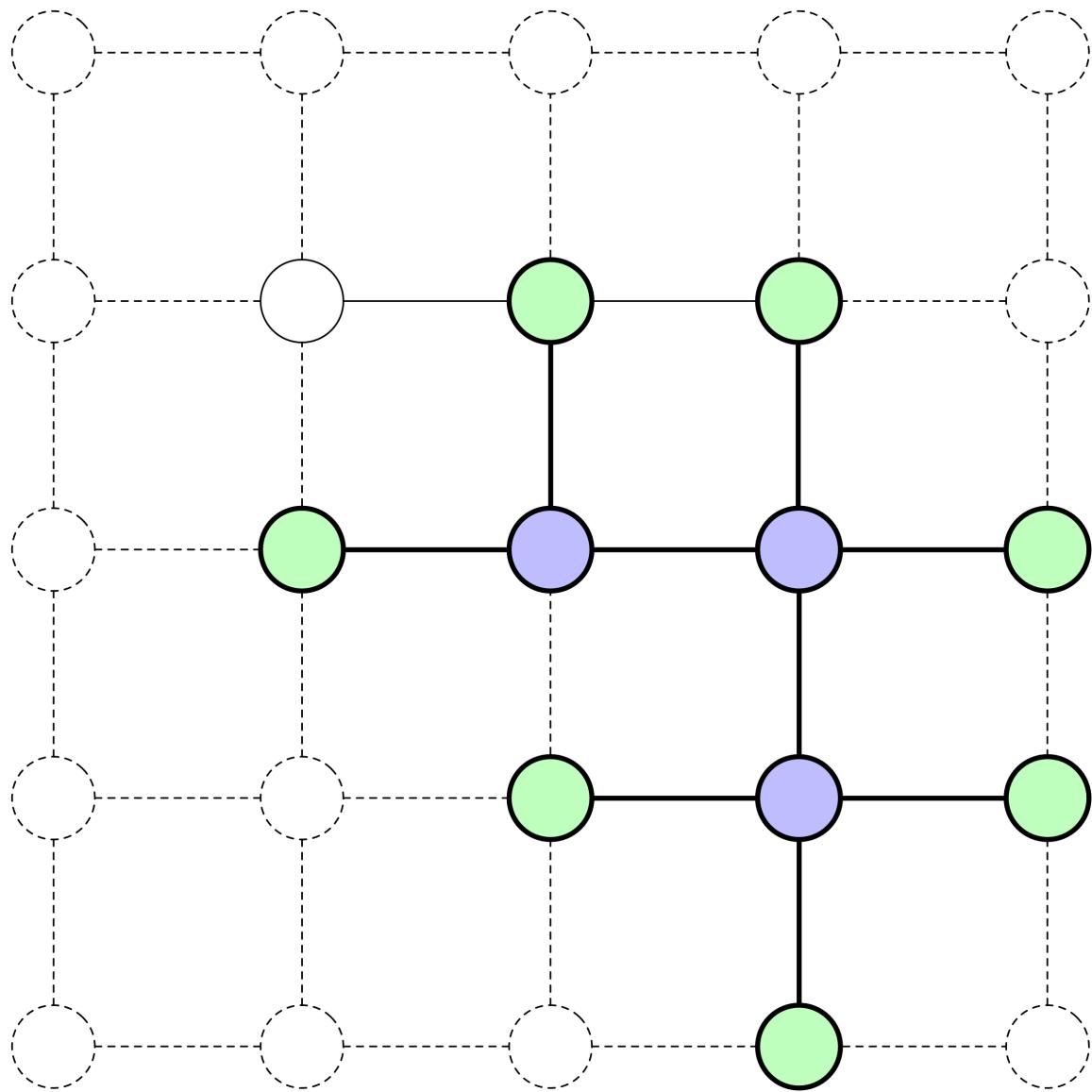
Dans le contexte du 8-puzzle, le tableau généré admet une solution. À partir de ce tableau, nous générerons tous les voisins possibles.

Chaque fois qu'un nœud n est extrait de la frontière, nous en générerons tous les voisins. Cette opération s'applique à tous les nœuds, y compris ceux situés sur un chemin optimal.

Frontière



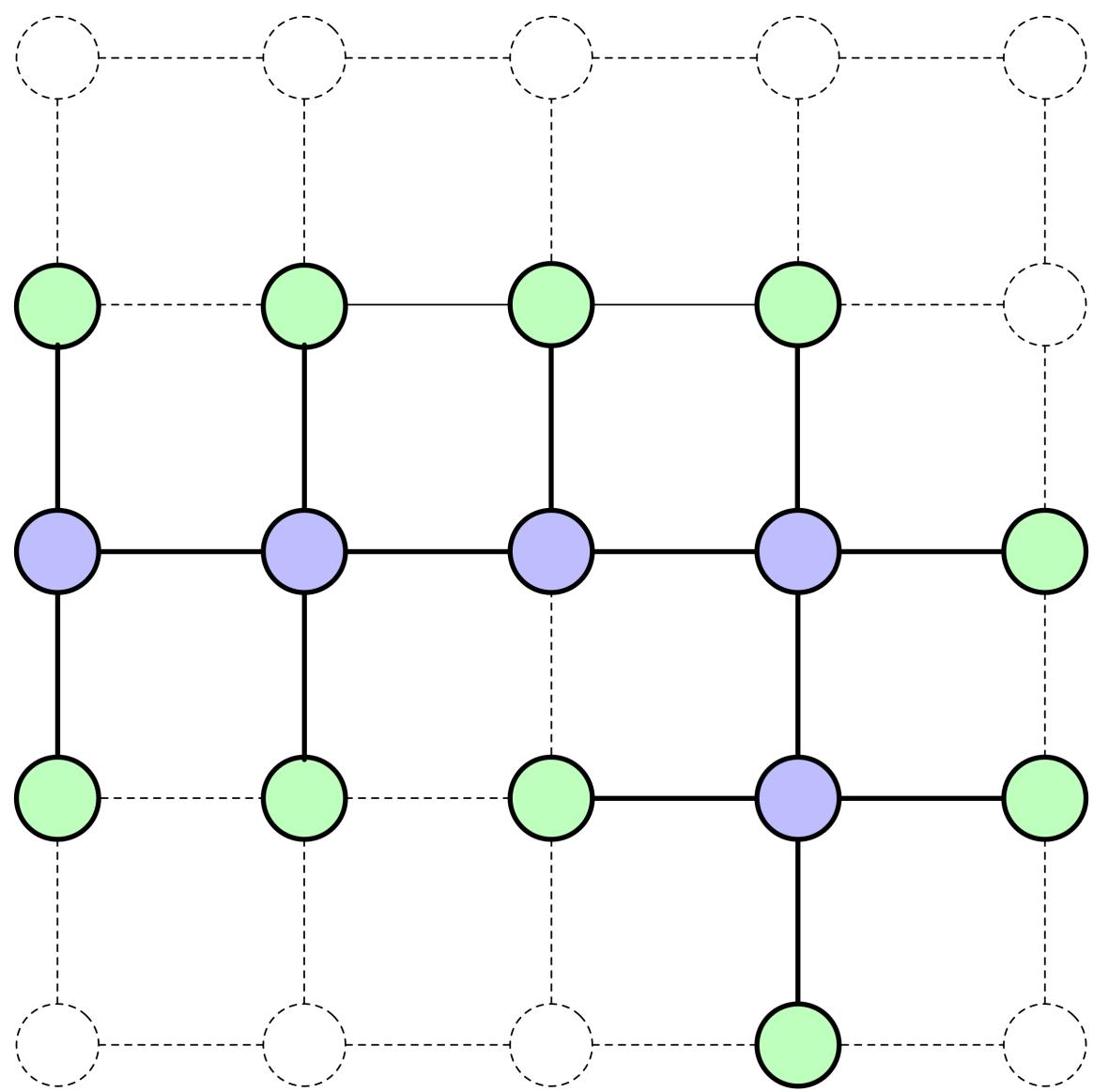


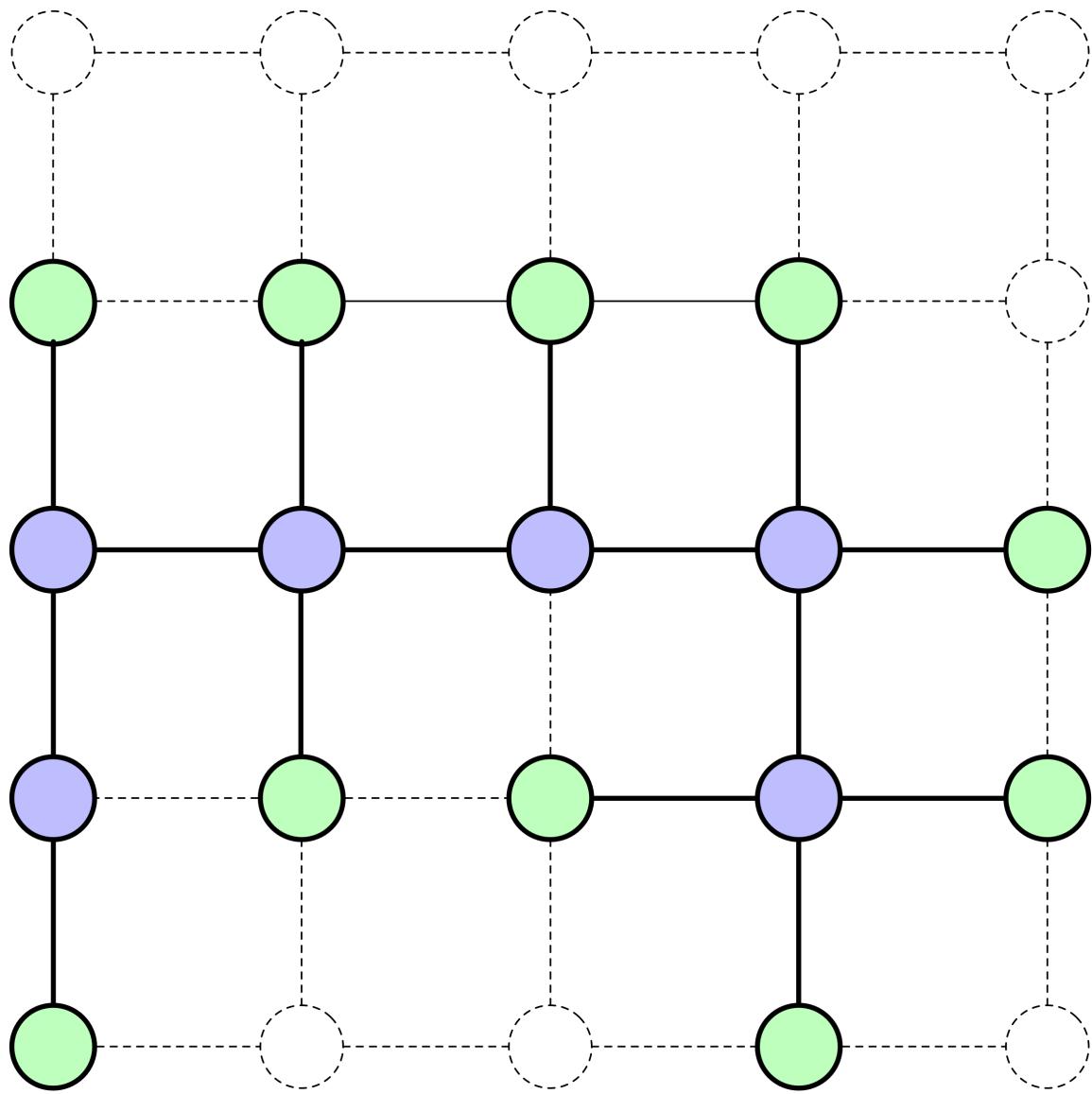


Dans le 8-Puzzle, quatre actions sont possibles : glisser à **gauche**, à **droite**, vers le **haut** ou vers le **bas**. La recherche peut être visualisée sur une grille : **nœuds violets** : états développés, **nœuds verts** : états de la frontière (atteints mais non développés).

Les diagrammes correspondent à l'arbre de recherche présenté sur la page précédente. Par exemple, l'état initial peut être développé en utilisant trois actions : glisser à gauche, à droite et vers le haut. Le noeud (2, 3) ne peut être développé qu'en glissant vers le bas, tandis que le noeud (3, 3) peut être développé en glissant à gauche et vers le bas.

Frontière





is_empty

```
In [3]: def is_empty(frontier):
    """Vérifie si la frontière est vide."""
    return len(frontier) == 0
```

Si la frontière devient vide (plus de nœuds à développer), le problème n'a pas de solution.

Existe-t-il des plateaux de 8-Puzzle qui n'ont pas de solutions ?

La résolubilité du 8-Puzzle dépend du nombre d'**inversions** dans l'état initial. Une inversion est une paire de tuiles où une tuile avec un numéro plus élevé précède une tuile avec un numéro plus bas lorsque le puzzle est vu comme une séquence (en excluant la tuile vide).

is_goal

```
In [4]: def is_goal(state, goal_state):
    """Détermine si un état donné correspond à l'état objectif."""
    return state == goal_state
```

Méthode auxiliaire.

expand

```
In [5]: def expand(state):
    """Génère les états successeurs en déplaçant la tuile vide dans toutes les directions possibles.
    size = int(len(state) ** 0.5) # Déterminer la taille du puzzle (3 pour le cas du 3x3)
    idx = state.index(0) # Trouver l'index de la tuile vide représentée par 0
    x, y = idx % size, idx // size # Convertir l'index en coordonnées (x, y)
    neighbors = []

    # Définir les mouvements possibles : Gauche, Droite, Haut, Bas
    moves = [(-1, 0), (1, 0), (0, -1), (0, 1)]
    for dx, dy in moves:
        nx, ny = x + dx, y + dy
        # Vérifier si la nouvelle position est dans les limites du puzzle
        if 0 <= nx < size and 0 <= ny < size:
            n_idx = ny * size + nx
            new_state = state.copy()
            # Échanger la tuile vide avec la tuile adjacente
            new_state[idx], new_state[n_idx] = new_state[n_idx], new_state[idx]
            neighbors.append(new_state)
    return neighbors
```

print_solution

```
In [6]: def print_solution(solution):
    """Affiche la séquence d'étapes de l'état initial à l'état objectif."""
    size = int(len(solution[0]) ** 0.5)
    for step, state in enumerate(solution):
        print(f"Étape {step} :")
        for i in range(size):
            row = state[i*size:(i+1)*size]
            print(' '.join(str(n) if n != 0 else ' ' for n in row))
        print()
```

Recherche en largeur

```
In [7]: from collections import deque
```

La **recherche en largeur (BFS)** utilise une **file** pour gérer les nœuds de la frontière, également connus sous le nom de liste ouverte.

Recherche en largeur

```
In [8]: def bfs(initial_state, goal_state):
    frontier = deque() # Initialiser la file pour BFS
    frontier.append((initial_state, [])) # Chaque élément est un tuple : (état, liste de chemins)

    explored = set()
    explored.add(tuple(initial_state))

    iterations = 0 # utilisé simplement pour comparer les algorithmes

    while not is_empty(frontier):
        current_state, path = frontier.popleft()

        if is_goal(current_state, goal_state):
            print(f"Nombre d'itérations : {iterations}")
            return path + [current_state] # Retourner le chemin réussi

        iterations = iterations + 1

        for neighbor in expand(current_state):
            neighbor_tuple = tuple(neighbor)
            if neighbor_tuple not in explored:
                explored.add(neighbor_tuple)
                frontier.append((neighbor, path + [current_state]))

    return None # Aucune solution trouvée
```

L'utilisation de `tuple` rend les états immuables et "hachables", permettant leur stockage dans un ensemble.

Recherche en profondeur

```
In [9]: def dfs(initial_state, goal_state):
    frontier = [(initial_state, [])] # Chaque élément est un tuple : (état, liste de chemins)

    explored = set()
    explored.add(tuple(initial_state))

    iterations = 0

    while not is_empty(frontier):
        current_state, path = frontier.pop()

        if is_goal(current_state, goal_state):
            print(f"Nombre d'itérations : {iterations}")
            return path + [current_state] # Retourner le chemin réussi

        iterations = iterations + 1

        for neighbor in expand(current_state):
```

```

neighbor_tuple = tuple(neighbor)
if neighbor_tuple not in explored:
    explored.add(neighbor_tuple)
    frontier.append((neighbor, path + [current_state]))

return None # Aucune solution trouvée

```

Remarques

- La **recherche en largeur (BFS)** identifie la solution optimale, 25 mouvements, en 145 605 itérations.
- La **recherche en profondeur (DFS)** découvre une solution impliquant 1 157 mouvements en 1 187 itérations.

Comment découvrir des solutions **plus efficacement** ?

La **recherche en profondeur (DFS)** produira-t-elle toujours des solutions sous-optimales ?

Non, si la solution optimale se trouve le long du chemin parcouru par la recherche en profondeur (DFS) dans l'arbre de recherche, alors DFS identifiera effectivement la solution optimale.

Est-il possible que DFS découvre des solutions supérieures à la solution optimale ?

Certainement pas ; de telles solutions seraient soit invalides (impliquant des mouvements impossibles), soit indiquerait une erreur dans votre estimation.

Cela signifie-t-il que la recherche en profondeur (DFS) n'a pas d'applications pratiques ?

Quand est-il approprié d'utiliser DFS ?

La recherche en largeur (BFS) étend sa frontière systématiquement dans toutes les directions, ce qui entraîne une croissance rapide des besoins en mémoire.

En revanche, l'utilisation de la mémoire de DFS est limitée par le nombre de mouvements nécessaires pour atteindre ses points de retour en arrière ou par la longueur du chemin de la première solution trouvée. Dans tous les scénarios, DFS continue d'étendre la frontière dans une direction.

Dans certaines applications où toutes les solutions possibles doivent être explorées, tout l'espace de recherche doit être parcouru. Utiliser BFS dans ces cas serait prohibitif en termes de mémoire. Cependant, DFS peut explorer l'ensemble de l'espace avec une utilisation minimale de la mémoire.

Le langage de programmation Prolog inclut un algorithme de retour en arrière intégré qui énumère toutes les solutions possibles. Le retour en arrière est une variante de DFS

efficace en mémoire.

La recherche limitée en profondeur et la recherche en approfondissement itératif seraient des algorithmes de recherche non informée alternatifs.

Trouver des solutions plus efficacement nécessite une connaissance du domaine.

Recherche informée

Recherche heuristique

Les algorithmes de recherche informée utilisent des **connaissances spécifiques au domaine** concernant l'emplacement de l'état objectif.

Recherche heuristique

Soit $f(n)$ une **fonction heuristique** qui estime le **coût du chemin de moindre coût** de l'état ou du nœud actuel n jusqu'à l'objectif.

Cette approche est appelée **recherche du meilleur d'abord** (*best-first search*).

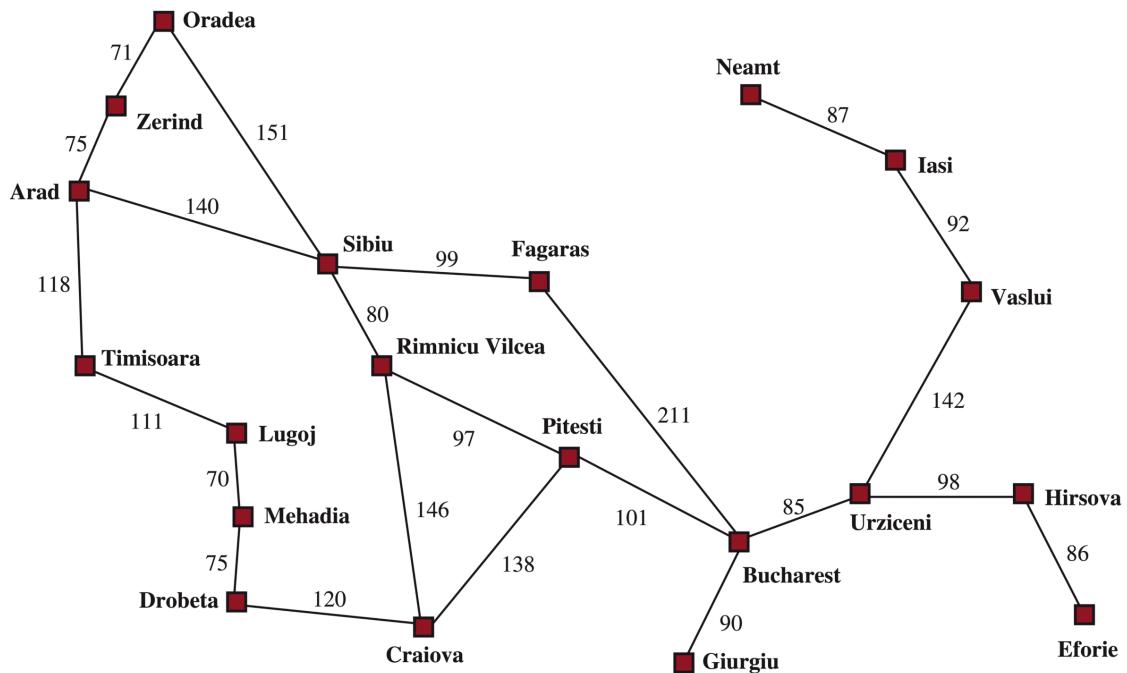
Recherche heuristique

Dans les **problèmes de recherche de route**, on pourrait utiliser la distance en ligne droite de la position actuel à la destination comme heuristique.

...

Bien qu'un chemin réel puisse ne pas exister le long de cette ligne droite, l'algorithme donnera la priorité à l'expansion du nœud le plus proche de la destination (objectif) en se basant sur cette mesure en ligne droite.

Exemple du livre



Source: (Russell et Norvig 2020, fig. 3.1)

Problématique : Déterminer l'itinéraire routier le plus court entre Arad (état initial) et Bucarest (état objectif).

Exemple du livre

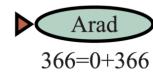
Arad	366	Mehadia	241
Bucharest	0	Neamt	234
Craiova	160	Oradea	380
Drobeta	242	Pitesti	100
Eforie	161	Rimnicu Vilcea	193
Fagaras	176	Sibiu	253
Giurgiu	77	Timisoara	329
Hirsova	151	Urziceni	80
Iasi	226	Vaslui	199
Lugoj	244	Zerind	374

Source: (Russell et Norvig 2020, fig. 3.16)

Nous possédons les données concernant les distances euclidiennes directes (en ligne droite, à vol d'oiseau) entre chacune des villes et Bucarest.

Exemple du livre

(a) The initial state

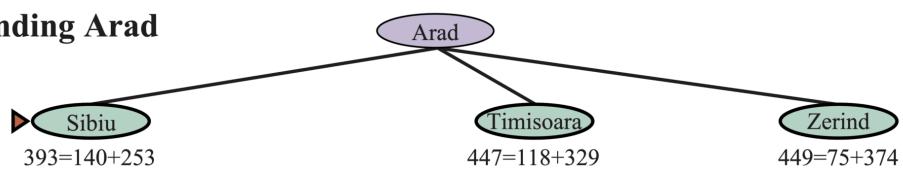


Source: (Russell et Norvig 2020, fig. 3.18)

L'état initial est Arad, avec une valeur heuristique de 366. Comme aucun chemin n'a encore été parcouru, le coût total estimé de cet état est la somme du coût parcouru, qui est 0, et de la distance euclidienne directe vers Bucarest, soit 366.

Exemple du livre

(b) After expanding Arad



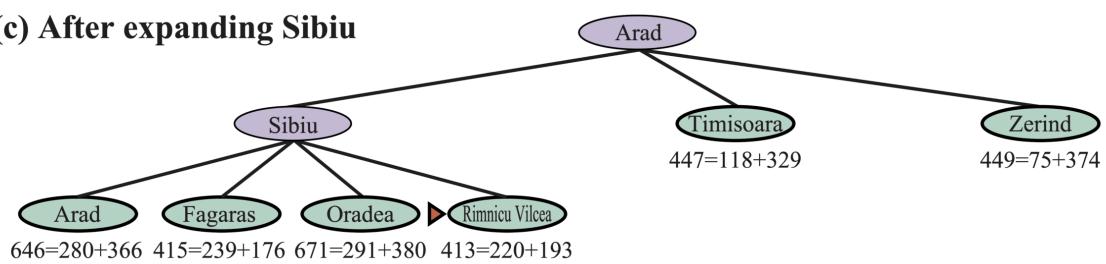
Source: (Russell et Norvig 2020, fig. 3.18)

Depuis Arad, trois villes peuvent être atteintes directement : Sibiu, Timisoara et Zerind. Pour chacune de ces destinations, nous évaluons la valeur heuristique en additionnant la distance parcourue jusqu'à présent et la distance euclidienne directe vers la destination finale.

Sibiu possède la valeur heuristique la plus basse et sera ainsi retirée de la frontière.

Exemple du livre

(c) After expanding Sibiu



Source: (Russell et Norvig 2020, fig. 3.18)

Depuis Sibiu, quatre villes peuvent être atteintes directement : Arad, Fagaras, Oradea et Rimnicu Vilcea. Pour chacune de ces destinations, nous évaluons la valeur heuristique en additionnant la distance parcourue jusqu'à présent et la distance euclidienne directe vers la destination finale.

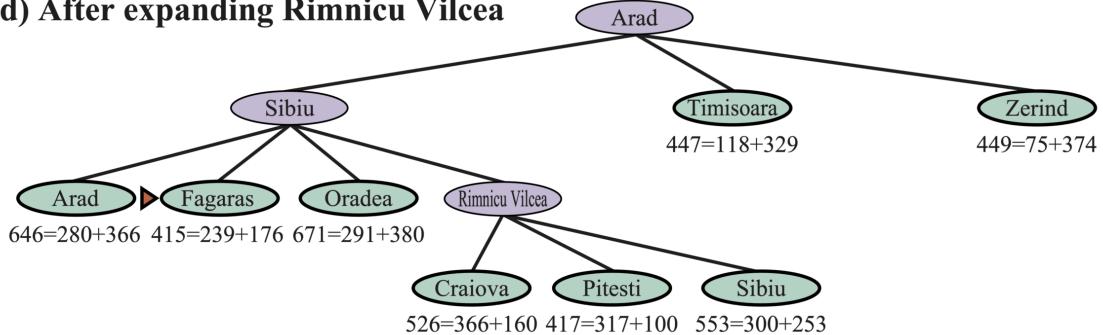
Dans cet exemple, les auteurs ont choisis de ne pas détecter les cycles, ainsi Arad est ajouté à la frontière.

Quelle sera la prochaine ville retirée de la frontière?

Rimnicu Vilcea possède la valeur heuristique la plus basse et sera ainsi retirée de la frontière.

Exemple du livre

(d) After expanding Rimnicu Vilcea



Source: (Russell et Norvig 2020, fig. 3.18)

À partir de Rimnicu Vilcea, trois villes sont directement accessibles : Craiova, Pitesti et Sibiu. Pour évaluer le potentiel de chaque destination, nous calculons une valeur heuristique en additionnant la distance déjà parcourue et la distance euclidienne directe jusqu'à la destination finale.

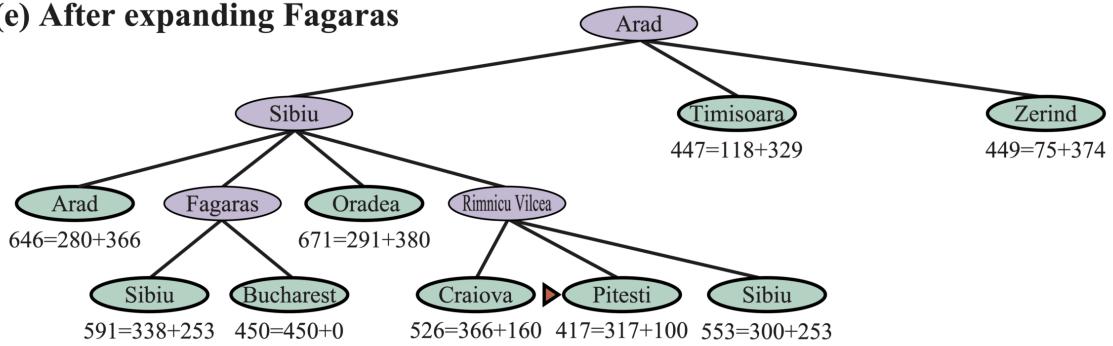
Il est important de noter que Sibiu est réintroduite dans la frontière. Sa valeur heuristique actuelle est de 553, résultant de la somme du chemin parcouru (300) et de la distance euclidienne directe vers Bucarest (253). Lors de sa première introduction dans la frontière, le chemin parcouru était de 140, ce qui donnait une valeur heuristique de 393. Bien que Sibiu présente un meilleur potentiel que des trajets alternatifs comme Arad vers Sibiu puis vers Arad, ou Arad vers Sibiu puis vers Oradea, elle ne constitue pas une bonne option par rapport aux autres possibilités.

Quelle sera la prochaine ville retirée de la frontière?

La prochaine ville à être retirée de la frontière sera Fagaras, car elle présente la plus faible valeur heuristique.

Exemple du livre

(e) After expanding Fagaras



Source: (Russell et Norvig 2020, fig. 3.18)

Depuis Fagaras, deux villes peuvent être atteintes directement : Sibiu et Bucharest. Pour chacune de ces destinations, nous évaluons la valeur heuristique en additionnant la distance parcourue jusqu'à présent et la distance euclidienne directe vers la destination finale.

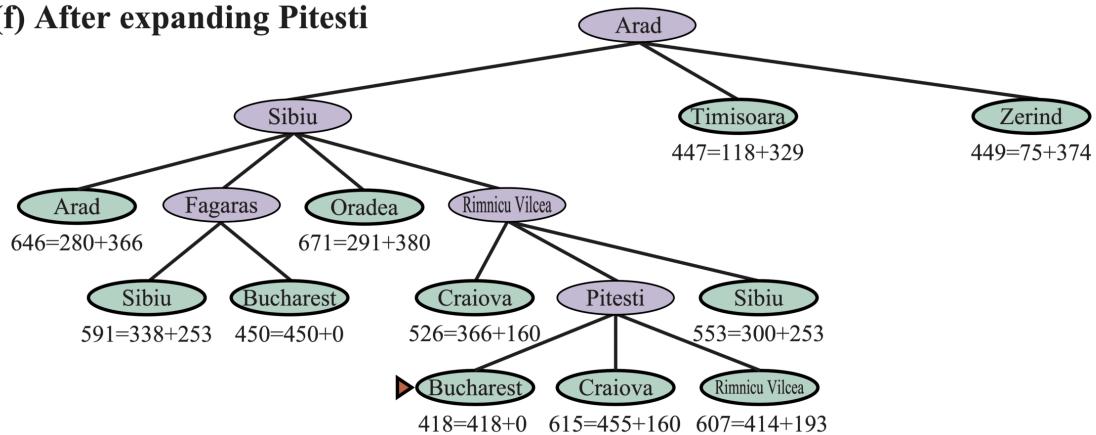
Bien que Bucarest soit l'objectif final, l'algorithme ne s'arrête pas immédiatement. Après le calcul des valeurs heuristiques, il se peut que ce chemin ne soit pas le plus prometteur. La valeur heuristique associée à Bucarest est de 450, ce qui correspond uniquement à la distance déjà parcourue, étant donné que c'est aussi la destination finale. La distance euclidienne directe entre le dernier nœud du chemin actuel et la destination sert d'estimation. Bien que cette estimation soit initialement peu précise, elle gagne en précision à mesure que l'on se rapproche de la destination.

Un aspect crucial de l'algorithme est qu'il ne se termine pas lorsqu'il atteint l'état objectif; au contraire, il continue jusqu'à ce que l'état objectif soit retiré de la frontière. Cela indique qu'aucun chemin alternatif ne semble plus prometteur.

Les nœuds Pitesti, Timisoara et Zerind, dans cet ordre, présentent des options plus favorables que Bucarest. Pitesti, possédant la valeur heuristique la plus faible, sera donc sélectionné pour être retiré de la frontière.

Exemple du livre

(f) After expanding Pitesti



Source: (Russell et Norvig 2020, fig. 3.18)

Depuis Pitesti, trois villes peuvent être atteintes directement : Bucharest, Craiova et Rimnicu Vilcea. Pour chacune de ces destinations, nous évaluons la valeur heuristique en additionnant la distance parcourue jusqu'à présent et la distance euclidienne directe vers la destination finale.

La prochaine ville à être retirée de la frontière sera Bucharest, car elle présente la plus faible valeur heuristique. C'est aussi l'état objectif, ainsi s'arrête. Arad, Sibiu, Rimnicu Vilcea, Pitesti, Bucharest est la solution retournée.

Est-ce que cette solution a un coût optimal?

Implémentation

- Comment peut-on modifier les algorithmes existants de **recherche en largeur** et de **recherche en profondeur** pour implémenter la **recherche du meilleur d'abord** ?
 - Cela peut être réalisé en utilisant une **file de priorité**, qui est triée selon les valeurs de la **fonction heuristique** $f(n)$.

...

In [10]: `import heapq`

Observation

La **recherche en largeur** peut être interprétée comme une forme de recherche du meilleur d'abord, où la fonction heuristique $f(n)$ est définie comme la **profondeur du nœud dans l'arbre de recherche**, correspondant à la longueur du chemin.

Cette solution est-elle viable ? La réponse est nuancée. Elle est utile pour examiner les propriétés de l'algorithme, mais l'utilisation d'une file offrira probablement une

implémentation plus efficace.

Comment pourrait-on implémenter la recherche en profondeur comme une forme de recherche du meilleur d'abord?

A-star

A^* (a-star, a-étoile) est la **recherche informée la plus courante**.

$$f(n) = g(n) + h(n)$$

où

- $g(n)$ est le coût du chemin depuis l'état *initial* jusqu'à n .
- $h(n)$ est une **estimation** du coût du plus court chemin de n à l'état *final*.

Hart, Nilsson, et Raphael (1968)

Il est évident que $g(n)$ est une valeur connue et non une estimation. Par conséquent, la précision de $f(n)$ s'améliore au fur et à mesure de l'exécution.

Admissibilité

Une heuristique est **admissible** si elle ne surestime jamais le coût réel pour atteindre l'objectif à partir de n'importe quel nœud dans l'espace de recherche.

...

Cela garantit que l'algorithme A^* trouve une solution optimale, puisque le coût estimé est toujours une borne inférieure du coût réel.

Que se passerait-il si une heuristique surestimaient le coût du plus court chemin de n à l'objectif ?

Si une heuristique devait surestimer le coût du chemin le plus court de n vers l'objectif, alors A^* pourrait ignorer ou retarder l'expansion des nœuds qui se trouvent réellement sur le chemin optimal, car leurs valeurs de f semblent artificiellement élevées.

L'algorithme pourrait toujours trouver une solution, mais pas nécessairement la plus courte !

Admissibilité

Formellement, une heuristique $h(n)$ est admissible si :

$$h(n) \leq h^*(n)$$

où :

- $h(n)$ est l'estimation heuristique du coût depuis le nœud n jusqu'à l'objectif.
- $h^*(n)$ est le coût réel du chemin optimal depuis le nœud n jusqu'à l'objectif.

Si une heuristique surestime le coût du plus court chemin entre n et l'objectif, alors A^* pourrait ignorer ou retarder l'expansion de nœuds qui se trouvent en réalité sur le chemin optimal, car leurs valeurs de f paraissent artificiellement trop élevées. L'algorithme peut encore trouver une solution, mais pas nécessairement la plus courte !

Optimalité de coût

L'**optimalité de coût** se réfère à la capacité d'un algorithme à trouver la solution de moindre coût parmi toutes les solutions possibles.

...

Dans le contexte des algorithmes de recherche comme A^* , l'optimalité de coût signifie que l'algorithme identifiera le chemin avec le coût total le plus bas depuis le départ jusqu'à l'objectif, à condition qu'une heuristique admissible soit utilisée.

Théorème

Soit h **admissible**, c'est-à-dire $0 \leq h(n) \leq h^*(n)$ pour tous les nœuds n , où $h^*(n)$ est le coût réel de n à un objectif.

...

Supposons des coûts d'action non négatifs et que A^* **se termine lorsqu'un objectif est sélectionné pour expansion** (c'est-à-dire, retiré de la frontière).

...

Alors A^* renvoie une solution optimale.

Voir aussi : [Berkeley, CS 188, Automne 2022 — Note de cours 02 : "Recherche informée"](#), 2 septembre 2022.

Preuve

1. Supposons pour contradiction

Supposons que A^* renvoie un objectif sous-optimal G avec un coût $C > C^*$, où C^* est le coût de la solution optimale.

Quand A^* s'arrête, G vient d'être sélectionné de la frontière avec $f(G) = g(G) = C$.

Preuve

1. Borne inférieure le long de tout chemin optimal

Considérons un nœud n sur un chemin vers un objectif optimal G^* (coût C^*).

Par admissibilité,

$$f(n) = g(n) + h(n) \leq g(n) + h^*(n) = C^*$$

Ainsi, chaque nœud sur un chemin optimal a $f(n) \leq C^*$.

Preuve

1. Le premier nœud non-expansé est dans la frontière

Quand G est choisi, marchez depuis le début le long d'un chemin optimal vers G^* jusqu'à atteindre le **premier nœud n qui n'a pas encore été expansé**.

...

Son parent sur ce chemin a été expansé (par définition de "premier"), donc n a été **généré** et est donc en **frontière**.

...

D'après l'étape 2, $f(n) \leq C^*$. Puisque $C^* < C = f(G)$, la règle de priorité de A^* devrait choisir n (ou un autre nœud avec $f \leq C^*$) avant G , une contradiction.

Preuve

1. Conclure l'optimalité

La contradiction montre que A^* ne peut pas renvoyer un objectif avec un coût $> C^*$; donc la solution renvoyée est optimale.

C.Q.F.D.

8-Puzzle

Pouvez-vous penser à une fonction heuristique pour le casse-tête de 8 tuiles ?

Distance du nombre d'inversions

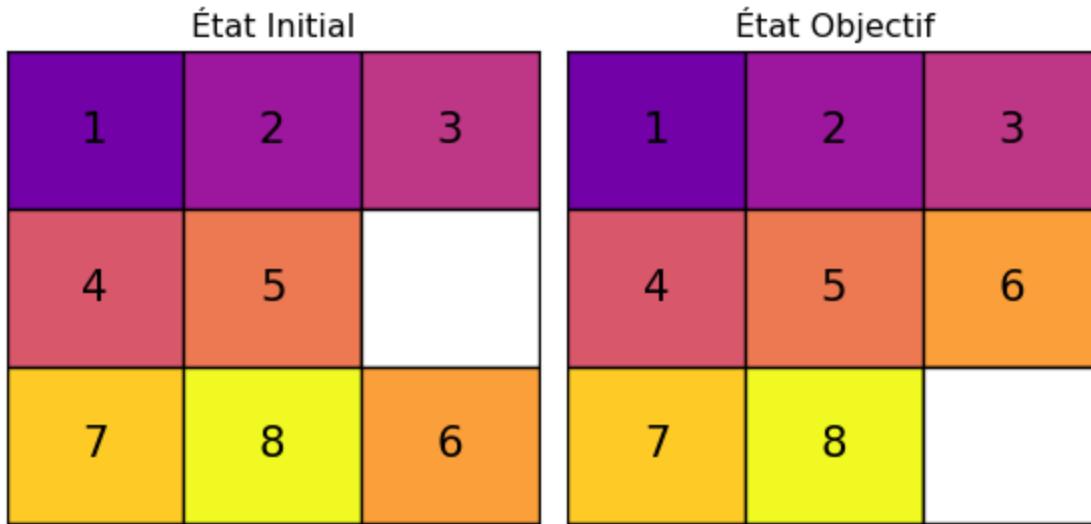
Peut-on utiliser le nombre d'inversions comme fonction heuristique, $h(n)$, pour le 8-Puzzle?

...

```
In [11]: # Définir l'état initial
initial_board = [
    [1, 2, 3],
    [4, 5, 0],
    [7, 8, 6]
]

# Définir l'état objectif
goal_board = [
    [1, 2, 3],
    [4, 5, 6],
    [7, 8, 0]
]

# Tracer les deux plateaux
plt.figure(figsize=(6, 3))
plot_board(initial_board, "État Initial", 2, 1)
plot_board(goal_board, "État Objectif", 2, 2)
plt.tight_layout()
plt.show()
```



- Calculez $h(s)$ et $h^*(s)$.
- Qu'en concluez-vous?

Intuitivement, compter le nombre d'inversions dans le taquin 8-puzzle pourrait sembler constituer une bonne heuristique : les configurations comportant de nombreuses inversions paraissent plus éloignées de l'état but, qui n'en contient aucune. Cependant, comme chaque déplacement modifie le nombre d'inversions de 0 ou 2, cette mesure n'est ni cohérente ni admissible pour estimer le progrès vers la solution.

Pour la configuration initiale du plateau, la fonction heuristique $h(s)$ a une valeur de 2, tandis que le coût optimal, noté $h^*(s)$, est 1. Donc, $h(s) = 2 > h^*(s) = 1$. Comme le nombre d'inversions peut surestimer le coût réel, il ne peut pas être considéré comme

une heuristique admissible. En effet, un seul mouvement peut altérer l'ordre relatif de la tuile déplacée par rapport à plusieurs autres tuiles, diminuant potentiellement le nombre d'inversions de plus de 1 par mouvement. Par conséquent, le nombre d'inversions ne fournit pas une borne inférieure valide sur le nombre de mouvements requis.

Soyez prudent lorsque vous construisez des exemples pour raisonner sur le problème. Par exemple, il peut sembler que la permutation « 1, 2, 3, 4, 5, 6, 0, 8, 7 » ne soit qu'à un seul déplacement de l'état but, puisqu'elle ne contient qu'une seule inversion.

Cependant, rappelez-vous que la **parité** du nombre d'inversions est invariante : chaque mouvement la modifie de 0 ou de 2. Comme cette configuration possède un nombre impair d'inversions, aucune séquence de déplacements ne peut la transformer en l'état but (la permutation identité).

Distance des tuiles mal placées

```
In [12]: def misplaced_tiles_distance(state, goal_state):
    # Comptez le nombre de tuiles mal placées
    misplaced_tiles = sum(1 for s, g in zip(state, goal_state) if s != g and
    return misplaced_tiles
```

Est-ce que cette heuristique est admissible?

Considérons un mouvement légal quelconque. Il glisse exactement une tuile dans l'espace vide. Ce mouvement peut fixer **au plus une tuile** qui était auparavant mal placée ; toutes les autres tuiles conservent leur statut de "mal placée vs. placée".

Par conséquent, le long de tout chemin de solution qui utilise k mouvements, le nombre de tuiles mal placées peut diminuer d'au plus k . Si le départ a $h(x)$ tuiles mal placées, toute solution doit avoir une longueur d'au moins $h(s)$ étapes.

Ainsi, $h(s) \leq h^*(s)$, c'est-à-dire que l'heuristique est admissible.

8-Puzzle

```
In [13]: plt.figure(figsize=(8, 2))

initial_state_8a = [1, 2, 3,
                    4, 0, 6,
                    7, 5, 8]

initial_state_8b = [6, 4, 5,
                    8, 2, 7,
                    1, 0, 3]

goal_state_8 = [1, 2, 3,
                4, 5, 6,
                7, 8, 0]
```

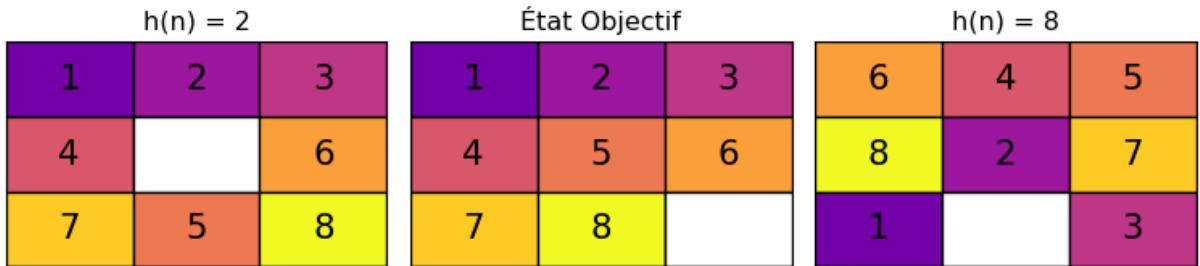
```

distance_a = misplaced_tiles_distance(initial_state_8a, goal_state_8)
distance_b = misplaced_tiles_distance(initial_state_8b, goal_state_8)

plot_board(initial_state_8a, f"h(n) = {distance_a}", 3, 1)
plot_board(goal_state_8, "État Objectif", 3, 2)
plot_board(initial_state_8b, f"h(n) = {distance_b}", 3, 3)

plt.tight_layout()
plt.show()

```



Recherche du meilleur d'abord

```

In [14]: def best_first_search(initial_state, goal_state):

    frontier = [] # Initialisez la file de priorité
    initial_h = misplaced_tiles_distance(initial_state, goal_state)

    # Ajoutez l'état initial avec sa valeur heuristique dans la file
    heapq.heappush(frontier, (initial_h, 0, initial_state, [])) # (f(n), g(
    explored = set()
    explored.add(tuple(initial_state))
    iterations = 0

    while not is_empty(frontier):
        f, g, current_state, path = heapq.heappop(frontier)

        if is_goal(current_state, goal_state):
            print(f"Nombre d'itérations : {iterations}")
            return path + [current_state] # Retournez le chemin réussi

        iterations += 1

        for neighbor in expand(current_state):
            if tuple(neighbor) not in explored:
                new_g = g + 1 # Incrémentez le coût du chemin
                h = misplaced_tiles_distance(neighbor, goal_state)
                new_f = new_g + h # Calculez le nouveau coût total
                # Ajoutez l'état voisin dans la file de priorité
                heapq.heappush(frontier, (new_f, new_g, neighbor, path + [cu
                explored.add(tuple(neighbor)) # Marquez le voisin comme exp

```

```
    return None # Aucune solution trouvée
```

Cas simple

```
In [15]: plt.figure(figsize=(8, 2))

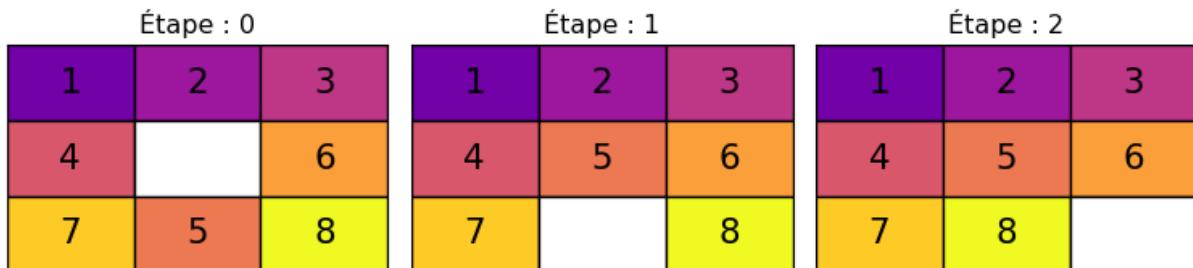
initial_state_8 = [1, 2, 3,
                   4, 0, 6,
                   7, 5, 8]
goal_state_8 = [1, 2, 3,
                4, 5, 6,
                7, 8, 0]

solutions = best_first_search(initial_state_8, goal_state_8)

for i, solution in enumerate(solutions):
    plot_board(solution, f"Étape : {i}", 3, i+1)

plt.tight_layout()
plt.show()
```

Nombre d'itérations : 2



```
In [16]: initial_state_8 = [1, 2, 3,
                           4, 0, 6,
                           7, 5, 8]
goal_state_8 = [1, 2, 3,
               4, 5, 6,
               7, 8, 0]

best_first_search(initial_state_8, goal_state_8)
```

Nombre d'itérations : 2

```
[[1, 2, 3, 4, 0, 6, 7, 5, 8],
 [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 0, 8],
 [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 0]]
```

Cas difficile

```
In [17]: initial_state_8 = [6, 4, 5,
                           8, 2, 7,
                           1, 0, 3]
goal_state_8 = [1, 2, 3,
               4, 5, 6,
```

```
7, 8, 0]

print("Résolution du casse-tête de 8 tuiles avec best_first_search...")

solution_8_bfs = best_first_search(initial_state_8, goal_state_8)

if solution_8_bfs:
    print(f"Solution trouvée par best_first_search en {len(solution_8_bfs)} -")
    print_solution(solution_8_bfs)
else:
    print("Aucune solution trouvée pour le casse-tête de 8 tuiles avec best_")
```

Résolution du casse-tête de 8 tuiles avec best_first_search...

Nombre d'itérations : 29005

Solution trouvée par best_first_search en 25 mouvements :

Étape 0 :

6 4 5
8 2 7
1 3

Étape 1 :

6 4 5
8 2 7
1 3

Étape 2 :

6 4 5
2 7
8 1 3

Étape 3 :

6 4 5
2 7
8 1 3

Étape 4 :

6 5
2 4 7
8 1 3

Étape 5 :

6 5
2 4 7
8 1 3

Étape 6 :

2 6 5
4 7
8 1 3

Étape 7 :

2 6 5
4 7
8 1 3

Étape 8 :

2 6 5
4 1 7
8 3

Étape 9 :

2 6 5
4 1 7
8 3

Étape 10 :

2 6 5
1 7

4 8 3

Étape 11 :

2 6 5
1 7
4 8 3

Étape 12 :

2 6 5
1 7
4 8 3

Étape 13 :

2 6 5
1 7 3
4 8

Étape 14 :

2 6 5
1 7 3
4 8

Étape 15 :

2 6 5
1 3
4 7 8

Étape 16 :

2 5
1 6 3
4 7 8

Étape 17 :

2 5
1 6 3
4 7 8

Étape 18 :

2 5 3
1 6
4 7 8

Étape 19 :

2 5 3
1 6
4 7 8

Étape 20 :

2 3
1 5 6
4 7 8

Étape 21 :

2 3
1 5 6
4 7 8

Étape 22 :

```
1 2 3
 5 6
4 7 8
```

Étape 23 :

```
1 2 3
4 5 6
 7 8
```

Étape 24 :

```
1 2 3
4 5 6
 7 8
```

Étape 25 :

```
1 2 3
4 5 6
 7 8
```

8-Puzzle

```
In [18]: def manhattan_distance(state, goal_state):
```

```
    distance = 0
    size = int(len(state) ** 0.5)
    for num in range(1, len(state)):
        idx1 = state.index(num)
        idx2 = goal_state.index(num)
        x1, y1 = idx1 % size, idx1 // size
        x2, y2 = idx2 % size, idx2 // size
        distance += abs(x1 - x2) + abs(y1 - y2)
    return distance
```

$$h_{\text{Manathan}}(s) = \sum_{t \in \{1, \dots, 8\}} (|x_t - x_t^*| + |y_t - y_t^*|)$$

Calcule l'heuristique de **distance de Manhattan** pour un état donné. Est-ce que cette heuristique est **admissible**?

Considérez une version simplifiée du 8-puzzle dans laquelle une tuile peut se déplacer vers n'importe quelle case adjacente (haut/bas/gauche/droite) sans avoir besoin du vide. Dans ce puzzle simplifié, le nombre exact de mouvements nécessaires à partir d'un état est précisément la distance totale de Manhattan (chaque mouvement réduit la distance d'une tuile de 1 et vous pouvez toujours déplacer directement la tuile nécessaire). Le coût optimal de tout problème simplifié est une borne inférieure du coût optimal du problème original, par conséquent la distance de Manhattan est admissible pour le véritable taquin 8-puzzle.

8-Puzzle

```
In [19]: plt.figure(figsize=(8, 2))

initial_state_8a = [1, 2, 3,
                    4, 0, 6,
                    7, 5, 8]

initial_state_8b = [6, 4, 5,
                    8, 2, 7,
                    1, 0, 3]

goal_state_8 = [1, 2, 3,
                4, 5, 6,
                7, 8, 0]

distance_a = manhattan_distance(initial_state_8a, goal_state_8)

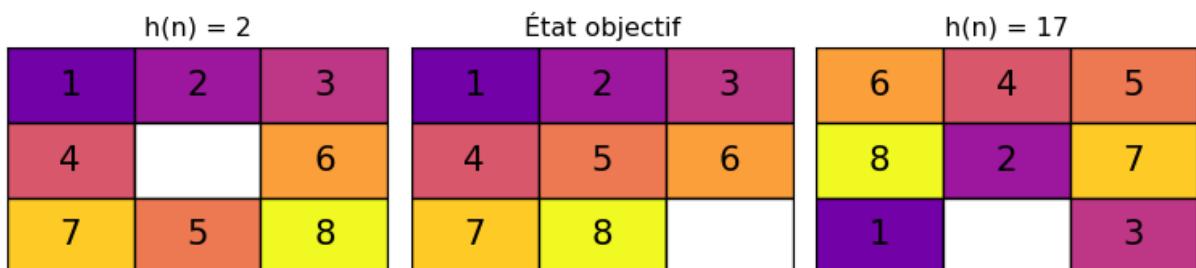
distance_b = manhattan_distance(initial_state_8b, goal_state_8)

plot_board(initial_state_8a, f"h(n) = {distance_a}", 3, 1)

plot_board(goal_state_8, "État objectif", 3, 2)

plot_board(initial_state_8b, f"h(n) = {distance_b}", 3, 3)

plt.tight_layout()
plt.show()
```



8-Puzzle

- Comparer les heuristiques **Manhattan** et **Tuiles Mal Placées**.
 - Laquelle est la plus efficace ?
 - Différences significatives de temps d'exécution ?

8-Puzzle

```

initial_state_8b = [6, 4, 5,
                    8, 2, 7,
                    1, 0, 3]

goal_state_8 = [1, 2, 3,
                4, 5, 6,
                7, 8, 0]

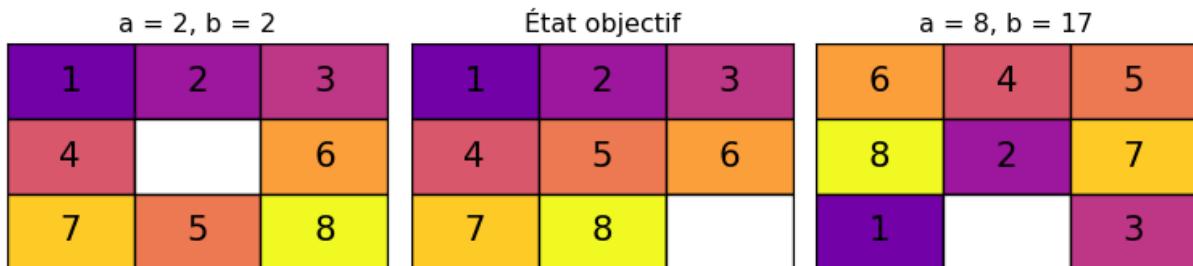
distance_a_mis = misplaced_tiles_distance(initial_state_8a, goal_state_8)
distance_b_mis = misplaced_tiles_distance(initial_state_8b, goal_state_8)

distance_a_man = manhattan_distance(initial_state_8a, goal_state_8)
distance_b_man = manhattan_distance(initial_state_8b, goal_state_8)

plot_board(initial_state_8a, f"a = {distance_a_mis}, b = {distance_a_man}",
plot_board(goal_state_8, "État objectif", 3, 2)

plot_board(initial_state_8b, f"a = {distance_b_mis}, b = {distance_b_man}",
plt.tight_layout()
plt.show()

```



où

- **a** = distance des tuiles mal placées
- **b** = distance de Manathan

8-Puzzle

```

In [21]: plt.figure(figsize=(8, 2))

initial_state_8a = [3, 1, 2,
                    4, 5, 6,
                    7, 8, 0]

initial_state_8b = [8, 2, 3,
                    4, 5, 6,
                    1, 0, 7]

goal_state_8 = [1, 2, 3,
                4, 5, 6,
                7, 8, 0]

```

```

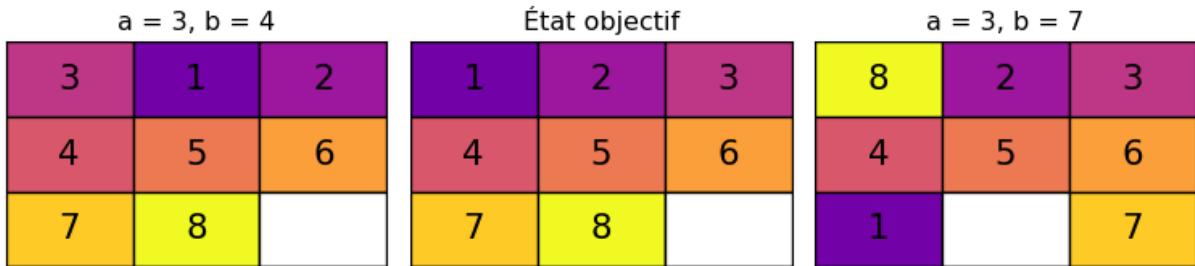
distance_a_mis = misplaced_tiles_distance(initial_state_8a, goal_state_8)
distance_b_mis = misplaced_tiles_distance(initial_state_8b, goal_state_8)

distance_a_man = manhattan_distance(initial_state_8a, goal_state_8)
distance_b_man = manhattan_distance(initial_state_8b, goal_state_8)

plot_board(initial_state_8a, f"a = {distance_a_mis}, b = {distance_a_man}",
plot_board(goal_state_8, "État objectif", 3, 2)

plot_board(initial_state_8b, f"a = {distance_b_mis}, b = {distance_b_man}",
plt.tight_layout()
plt.show()

```



où

- **a** = distance des tuiles mal placées
- **b** = distance de Manhattan

`misplaced_tiles_distance` ne tient pas compte de la distance d'une tuile par rapport à sa position finale prévue, tandis que `manhattan_distance` le fait.

Ainsi, on peut s'attendre à ce que l'algorithme utilisant la distance de Manhattan sélectionne le prochain nœud à explorer de manière plus judicieuse.

Recherche du meilleur d'abord

```

In [22]: def best_first_search_revised(initial_state, goal_state):
    frontier = [] # Initialiser la file de priorité
    initial_h = manhattan_distance(initial_state, goal_state)
    # Ajouter l'état initial avec sa valeur heuristique dans la file
    heapq.heappush(frontier, (initial_h, 0, initial_state, [])) # (f(n), g(r

    explored = set()
    explored.add(tuple(initial_state))
    iterations = 0

    while not is_empty(frontier):
        f, g, current_state, path = heapq.heappop(frontier)

        if is_goal(current_state, goal_state):
            print(f"Nombre d'itérations : {iterations}")
            return path + [current_state] # Retourner le chemin réussi

```

```

iterations = iterations + 1

for neighbor in expand(current_state):
    if tuple(neighbor) not in explored:
        new_g = g + 1 # Incrémenter le coût du chemin
        h = manhattan_distance(neighbor, goal_state)
        new_f = new_g + h # Calculer le nouveau coût total
        # Ajouter l'état voisin dans la file de priorité
        heapq.heappush(frontier, (new_f, new_g, neighbor, path + [cu
explored.add(tuple(neighbor)) # Marquer le voisin comme expl

return None # Aucune solution trouvée

```

Lors de l'expansion d'un nœud dans l'arbre de recherche, il est crucial de noter que nous n'évaluons pas immédiatement ses nœuds descendants pour déterminer s'ils sont des nœuds objectifs. Au lieu de cela, ces descendants sont ajoutés à la frontière, qui est une file de priorité. Cela permet de comparer leurs valeurs $f(n)$ avec celles des autres nœuds dans la frontière, garantissant que les nœuds les plus prometteurs sont considérés en premier en fonction de leur coût total estimé.

Par conséquent, il est possible que la frontière inclue des nœuds qui sont des nœuds objectifs. Cependant, leurs valeurs $f(n)$ peuvent être plus élevées que celles d'autres nœuds jugés plus prometteurs, car ces autres nœuds pourraient mener à un chemin plus court vers l'objectif.

Cas simple

```

In [23]: plt.figure(figsize=(8, 2))

initial_state_8 = [1, 2, 3,
                   4, 0, 6,
                   7, 5, 8]

goal_state_8 = [1, 2, 3,
                4, 5, 6,
                7, 8, 0]

solutions = best_first_search_revised(initial_state_8, goal_state_8)

for i, solution in enumerate(solutions):
    plot_board(solution, f"Étape : {i}", 3, i+1)

plt.tight_layout()
plt.show()

```

Nombre d'itérations : 2

Étape : 0			Étape : 1			Étape : 2		
1	2	3	1	2	3	1	2	3
4		6	4	5	6	4	5	6
7	5	8	7		8	7	8	

```
In [24]: initial_state_8 = [1, 2, 3,
                         4, 0, 6,
                         7, 5, 8]

goal_state_8 = [1, 2, 3,
               4, 5, 6,
               7, 8, 0]

best_first_search_revised(initial_state_8, goal_state_8)
```

Nombre d'itérations : 2
[[1, 2, 3, 4, 0, 6, 7, 5, 8],
 [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 0, 8],
 [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 0]]

Cas difficile

```
In [25]: initial_state_8 = [6, 4, 5,
                           8, 2, 7,
                           1, 0, 3]

goal_state_8 = [1, 2, 3,
               4, 5, 6,
               7, 8, 0]

print("Résolution du 8-Puzzle avec best_first_search...")

solution_8_bfs = best_first_search_revised(initial_state_8, goal_state_8)

if solution_8_bfs:
    print(f"Solution best_first_search trouvée en {len(solution_8_bfs) - 1}")
    print_solution(solution_8_bfs)
else:
    print("Aucune solution trouvée pour le 8-Puzzle en utilisant best_first_
```

Résolution du 8-Puzzle avec best_first_search...
Nombre d'itérations : 2255
Solution best_first_search trouvée en 25 mouvements :
Étape 0 :
6 4 5
8 2 7
1 3

Étape 1 :
6 4 5
8 2 7
1 3

Étape 2 :
6 4 5
2 7
8 1 3

Étape 3 :
6 4 5
2 7
8 1 3

Étape 4 :
6 5
2 4 7
8 1 3

Étape 5 :
6 5
2 4 7
8 1 3

Étape 6 :
2 6 5
4 7
8 1 3

Étape 7 :
2 6 5
4 7
8 1 3

Étape 8 :
2 6 5
4 1 7
8 3

Étape 9 :
2 6 5
4 1 7
8 3

Étape 10 :
2 6 5
1 7

4 8 3

Étape 11 :

2 6 5
1 7
4 8 3

Étape 12 :

2 6 5
1 7
4 8 3

Étape 13 :

2 6 5
1 7 3
4 8

Étape 14 :

2 6 5
1 7 3
4 8

Étape 15 :

2 6 5
1 3
4 7 8

Étape 16 :

2 5
1 6 3
4 7 8

Étape 17 :

2 5
1 6 3
4 7 8

Étape 18 :

2 5 3
1 6
4 7 8

Étape 19 :

2 5 3
1 6
4 7 8

Étape 20 :

2 3
1 5 6
4 7 8

Étape 21 :

2 3
1 5 6
4 7 8

Étape 22 :

1 2 3
5 6
4 7 8

Étape 23 :

1 2 3
4 5 6
7 8

Étape 24 :

1 2 3
4 5 6
7 8

Étape 25 :

1 2 3
4 5 6
7 8

Expérimentation

```
In [26]: def best_first_search_count(initial_state, goal_state):  
    frontier = [] # Initialiser la file de priorité  
    initial_h = misplaced_tiles_distance(initial_state, goal_state)  
    # Ajouter l'état initial avec sa valeur heuristique dans la file  
    heapq.heappush(frontier, (initial_h, 0, initial_state, [])) # (f(n), g(r), n, state)  
  
    explored = set()  
  
    iterations = 0  
  
    while not is_empty(frontier):  
        f, g, current_state, path = heapq.heappop(frontier)  
  
        if is_goal(current_state, goal_state):  
            return len(path), iterations  
  
        iterations = iterations + 1  
  
        explored.add(tuple(current_state))  
  
        for neighbor in expand(current_state):  
            if tuple(neighbor) not in explored:  
                new_g = g + 1 # Incrémenter le coût du chemin  
                h = misplaced_tiles_distance(neighbor, goal_state)  
                new_f = new_g + h # Calculer le nouveau coût total  
                # Ajouter l'état voisin dans la file de priorité  
                heapq.heappush(frontier, (new_f, new_g, neighbor, path + [current_state]))  
                explored.add(tuple(neighbor)) # Marquer le voisin comme exploré  
  
    return None, None # Aucune solution trouvée
```

```
In [27]: def best_first_search_revised_count(initial_state, goal_state):
    frontier = [] # Initialiser la file de priorité
    initial_h = manhattan_distance(initial_state, goal_state)
    # Ajouter l'état initial avec sa valeur heuristique dans la file
    heapq.heappush(frontier, (initial_h, 0, initial_state, [])) # (f(n), g(r

    explored = set()

    iterations = 0

    while not is_empty(frontier):
        f, g, current_state, path = heapq.heappop(frontier)

        if is_goal(current_state, goal_state):
            return len(path), iterations

        iterations = iterations + 1

        explored.add(tuple(current_state))

        for neighbor in expand(current_state):
            if tuple(neighbor) not in explored:
                new_g = g + 1 # Incrémenter le coût du chemin
                h = manhattan_distance(neighbor, goal_state)
                new_f = new_g + h # Calculer le nouveau coût total
                # Ajouter l'état voisin dans la file de priorité
                heapq.heappush(frontier, (new_f, new_g, neighbor, path + [cu
                explored.add(tuple(neighbor)) # Marquer le voisin comme expl

    return None, None # Aucune solution trouvée
```

Nous introduisons deux nouvelles fonctions : chacune renvoie la longueur de la solution ainsi que le nombre d'itérations effectuées. Ces fonctions seront utilisées dans nos prochaines analyses expérimentales.

1000 Expériences

```
In [28]: goal_state_8 = [1, 2, 3,
                     4, 5, 6,
                     7, 8, 0]

moves = []
iterations_a = []
iterations_b = []

for i in range(1000):
    initial_state_8 = generate_solvble_board()
    nb_moves, nb_iterations_a = best_first_search_count(initial_state_8, goa
    nb_moves, nb_iterations_b = best_first_search_revised_count(initial_stat
    moves.append(nb_moves)
    iterations_a.append(nb_iterations_a)
    iterations_b.append(nb_iterations_b)
```

```

import seaborn as sns
import matplotlib.pyplot as plt

# Configurer la structure des sous-graphiques
fig, axes = plt.subplots(1, 2, figsize=(10, 5), sharey=True)

# Tracer l'histogramme pour `moves`
sns.histplot(moves, bins=20, kde=True, color='green', ax=axes[0], edgecolor='black')
axes[0].set_title("Histogramme des mouvements")
axes[0].set_xlabel("Mouvements")
axes[0].set_ylabel("Fréquence")

# Tracer l'histogramme pour `iterations`
sns.histplot(iterations_a, kde=True, color='red', ax=axes[1], edgecolor='black')
sns.histplot(iterations_b, kde=True, color='blue', ax=axes[1], edgecolor='black')
axes[1].set_title("Histogramme des itérations")
axes[1].set_xlabel("Itérations")

# Afficher le graphique
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()

```

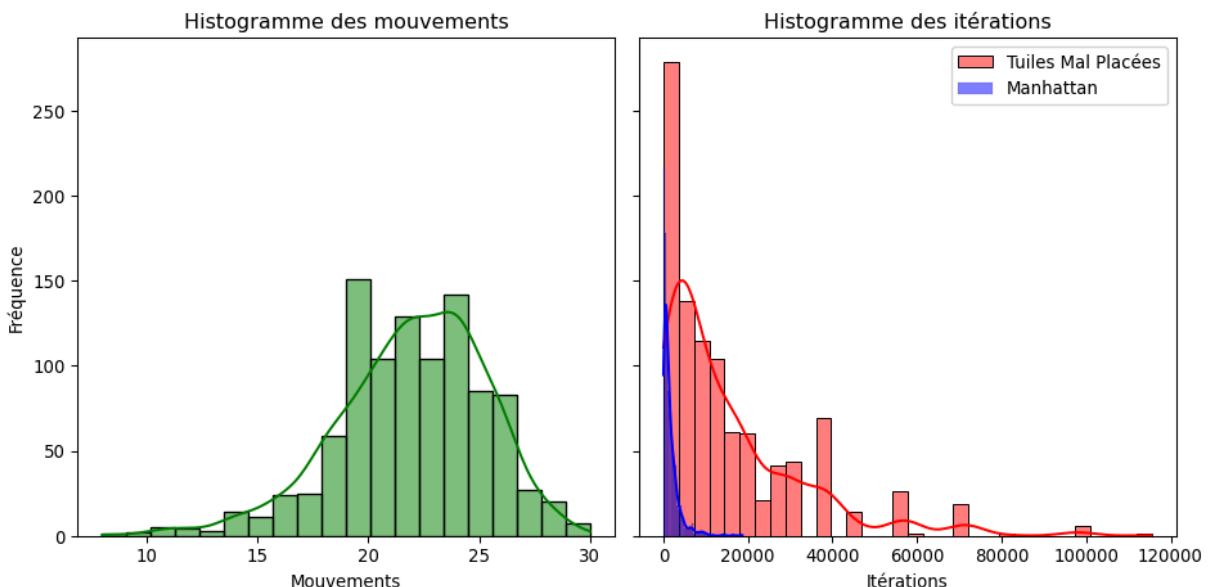


Diagramme de dispersion

```

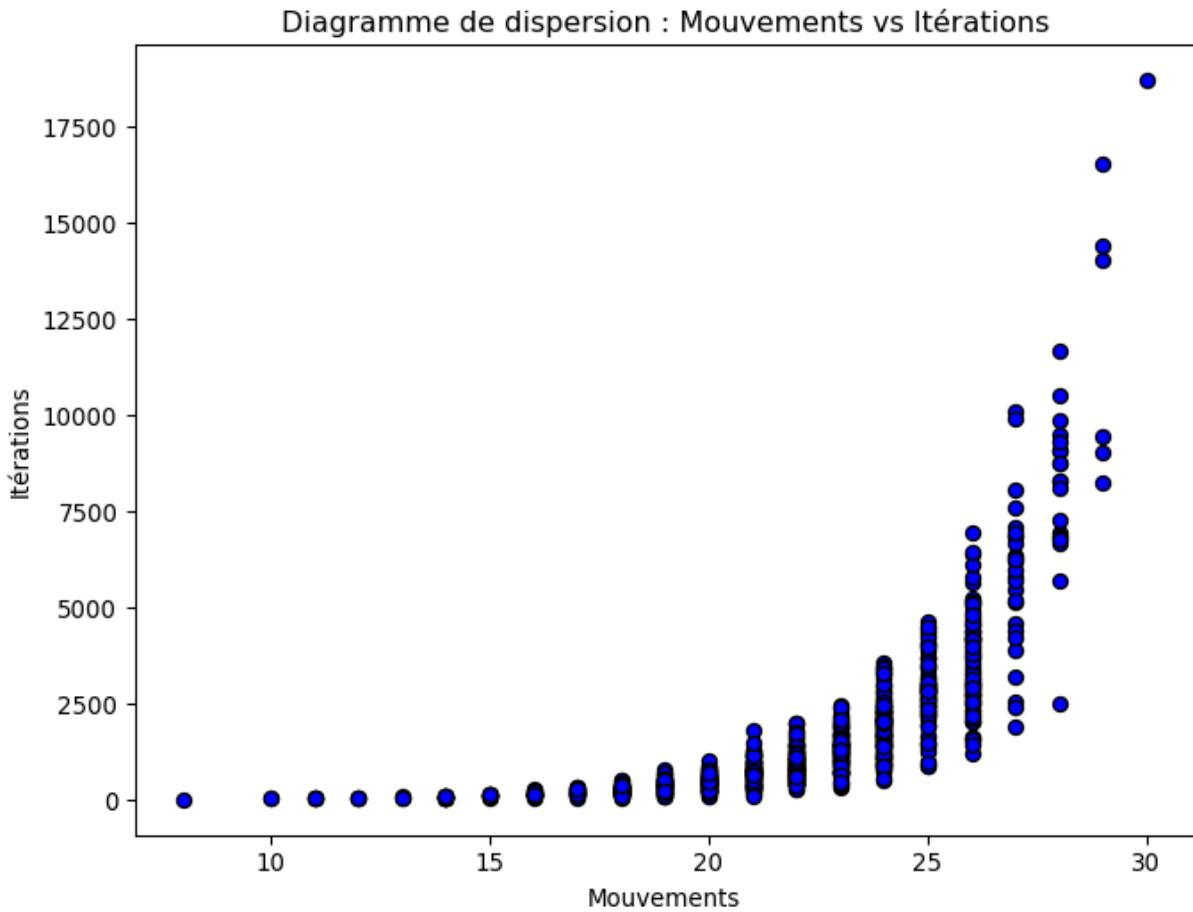
In [29]: # Créer un diagramme de dispersion

plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.scatter(moves, iterations_b, color='blue', edgecolor='black')

# Ajouter des titres et des étiquettes
plt.title("Diagramme de dispersion : Mouvements vs Itérations")
plt.xlabel("Mouvements")
plt.ylabel("Itérations")

```

```
# Afficher le graphique  
plt.show()
```



(Manhattan)

Exploration

La recherche en largeur (BFS) garantit de trouver le chemin le plus court, ou la solution de coût le plus bas, en supposant que toutes les actions ont un coût unitaire.

Développez un programme qui effectue les tâches suivantes :

1. Générer une configuration aléatoire du puzzle 8-Puzzle.
2. Déterminer le chemin le plus court en utilisant la recherche en largeur.
3. Identifier la solution optimale en utilisant l'algorithme A^* .
4. Comparer les coûts des solutions obtenues aux étapes 2 et 3. Il ne devrait pas y avoir de différence si A^* identifie des solutions optimales en termes de coût.
5. Répéter le processus.

Exploration

L'heuristique $h(n) = 0$ est considérée comme admissible, mais elle entraîne généralement une exploration inefficace de l'espace de recherche. Développez un programme pour explorer ce concept. Montrez que, lorsque toutes les actions sont supposées avoir un coût unitaire, A^* et la recherche en largeur (BFS) explorent l'espace de recherche de manière similaire. Plus précisément, ils examinent d'abord tous les chemins de longueur un, puis ceux de longueur deux, et ainsi de suite.

Remarques

- La **recherche en largeur (BFS)** identifie la solution optimale, 25 mouvements, en 145 605 itérations.
- La **recherche en profondeur (DFS)** découvre une solution impliquant 1 157 mouvements en 1 187 itérations.
- La **recherche du meilleur d'abord** identifie la solution optimale, 25 mouvements, en 2 255 itérations.

Évaluation de la performance

- **Complétude** : L'algorithme assure-t-il qu'une solution sera trouvée si elle existe et indique-t-il correctement l'absence de solution lorsqu'aucune solution n'existe ?
- **Optimalité du coût** : L'algorithme identifie-t-il la solution avec le **coût de chemin le plus bas** parmi toutes les solutions possibles ?
- Les trois algorithmes sont-ils complets ? Quelles sont les conditions nécessaires ?
- Tous les trois algorithmes garantissent-ils l'optimalité du coût ?

Évaluation de la performance

- **Complexité temporelle** : Comment le **temps** requis par l'algorithme évolue-t-il par rapport au **nombre d'états** et d'**actions** ?
- **Complexité spatiale** : Comment l'**espace** requis par l'algorithme évolue-t-il par rapport au **nombre d'états** et d'**actions** ?

Alternativement, la complexité peut être évaluée en fonction de la **profondeur** (d) et du **facteur de branchement** (b) de l'arbre de recherche, plutôt qu'en fonction du nombre d'états (nœuds) et d'actions (arêtes) dans l'espace d'états.

Vidéos par Sebastian Lague

- [A* Pathfinding \(E01 : explication de l'algorithme\)](#) publié le 2014-12-16.
- [A* Pathfinding \(E02 : grille de nœuds\)](#) publié le 2014-12-18.
- [A* Pathfinding \(E03 : implémentation de l'algorithme\)](#) publié le 2014-12-19.
- [A* Pathfinding \(E04 : optimisation du tas\)](#) publié le 2014-12-24.
- [A* Pathfinding \(E05 : unités\)](#) publié le 2015-01-06.
- [A* Pathfinding \(E06 : poids\)](#) publié le 2015-01-11.
- [A* Pathfinding \(E07 : poids lissés\)](#) publié le 2016-12-30.
- [A* Pathfinding \(E08 : lissage de chemin 1/2\)](#) publié le 2017-01-31.
- [A* Pathfinding \(E09 : lissage de chemin 2/2\)](#) publié le 2017-01-31.
- [A* Pathfinding \(E10 : threading\)](#) publié le 2017-02-03.
- [Tutorial A* Pathfinding \(Unity\)](#) (liste de lecture)

Une ressource dédiée à A^*

- [Amit's A* Pages](#)

Prologue

Résumé

- Recherche informée et heuristiques
- Recherche du meilleur d'abord
- Implémentations
- **Recherche informée et heuristiques :**
 - Introduit le concept de **fonctions heuristiques** ($h(n)$) pour estimer les coûts.
 - **Recherche du meilleur d'abord :**
 - Utilise des heuristiques pour prioriser les nœuds qui semblent plus proches de l'objectif.
 - Implémenté avec une file de priorité triée par coût estimé.
 - **Heuristique de distance de Manhattan :**
 - Calcule la somme des distances des tuiles par rapport à leurs positions cibles.
 - Utilisé dans le 8-Puzzle pour guider la recherche plus efficacement.
- **Analyse comparative :**
 - **BFS** : Solution optimale en 145 605 itérations (25 mouvements).
 - **DFS** : Solution sous-optimale en 1 187 itérations (1 157 mouvements).
 - **Recherche du meilleur d'abord** : Solution optimale en 2 255 itérations (25 mouvements).

- Démontré que les algorithmes de recherche informée peuvent trouver des solutions optimales plus efficacement.

Prochain cours

- Nous explorerons plus en détail les fonctions heuristiques et examinerons d'autres algorithmes de recherche.

Références

Hart, Peter E., Nils J. Nilsson, et Bertram Raphael. 1968. « A Formal Basis for the Heuristic Determination of Minimum Cost Paths ». *IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics* 4 (2): 100-107. <https://doi.org/10.1109/tssc.1968.300136>.

Russell, Stuart, et Peter Norvig. 2020. *Artificial Intelligence: A Modern Approach*. 4^e éd. Pearson. <http://aima.cs.berkeley.edu/>.

Marcel **Turcotte**

Marcel.Turcotte@uOttawa.ca

École de **science informatique** et de génie électrique (**SIGE**)

Université d'Ottawa